



“Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat Edición 2009” Guía–Probleuario Nivel Secundaria

Problema 1

Establezca el número más grande de los siguientes números:

$$\sqrt{3}, \quad 1.7320 \quad \text{y} \quad 1 + 7/10 + 3/11 + 2/12.$$

Problema 2

Calcule la distancia que existe entre los números

$$\sum_{i=1}^{50} \frac{1}{i} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{50} \frac{1}{i+1}$$

dentro de la recta numérica.

Problema 3

Calcule el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los números 12080 y -2010.

Problema 4

Calcule los números $(11)_3$, $(101)_3$ y $(211)_3$ en base 2.

Problema 5

Encuentre los números reales x 's que satisfagan la siguiente ecuación:

$$\frac{\frac{3}{10} + 5}{\frac{7}{2} + x} = \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + 4}.$$

Problema 6

Encuentre las raíces de la ecuación

$$x^{(2)_4} + (2)_4 x - (203)_4 = (0)_4,$$

la cual está expresada en base 4.

Problema 7

Factorice la expresión algebraica

$$a^5 b^{2/3} c^3 - x^4 y^7 z^{1/2}.$$

Problema 8

Pruebe que para cualesquiera x e y números reales se cumple la desigualdad:

$$5x^2 + 5y^2 - 8xy \geq 0.$$

Problema 9

¿Cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas?

$$(a) \frac{-3}{6} = -\frac{1}{-2} \quad (b) \cos(0.5) = -2 \quad (c) 120 = 3^{\log_3(120)}.$$

Problema 10

Complete los números de la línea inferior que ha de seguir en la siguiente pirámide. ¿Qué primer número debe de ir en la sexta línea correspondiente?

$$\begin{array}{ccc} & 7 & \\ & 11 & 15 \\ 19 & 23 & 27 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Problema 11

Realice el mismo procedimiento del Problema 10.

$$\begin{array}{ccc} & 6 & \\ & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Problema 12

Usando la fórmula

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1,$$

calcule el $\cos(\theta/2)$ sabiendo que $\cos(\theta) = 2/5$.

Problema 13

Tres amigos, A , B y C , invierten cierto capital en la compra de un pequeño restaurante. El restaurante les cuesta a los tres \$300000.00, de los cuales A pone \$150000.00 y B pone \$80000.00. Si el primer mes obtienen una ganancia de \$15000.00, ¿cómo deben de repartirse dicha ganancia?

Problema 14

Un autobús de pasajeros va, en una autopista de la República Mexicana, a una velocidad de $85\frac{1}{2}$ km/h. Si le faltan $120\frac{3}{4}$ de minutos para llegar a su destino, ¿cuántos kilómetros le falta para llegar?

Problema 15

Un trabajador va a obtener un pago de utilidades el cual está pensando en invertirlo en un banco. Dicho banco ofrece una tasa de interés anual neto del 1.8%. Al hacer sus cálculos el trabajador, observa que en 6 meses obtendrá un capital de \$8072.00. ¿Cuál será el capital inicial y final si el primero lo invierte a un año y medio?

Problema 16

De respuesta a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Es cierta la relación $\log_3(729) + \log_2(128) = \log_6(729 \cdot 128)$?

(b) ¿Cuál es el valor de $\log_3(729) + \log_2(128)$?

Problema 17

Encuentre los números reales x los cuales satisfagan la relación:

$$\log_2(x) = \log_2(x - 1) + 1.$$

Problema 18

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$x - 2y = 5$$

$$x - 5y = 1.$$

Problema 19

La medida de dos ángulos de un triángulo son de $53^\circ 42'$ y de $76^\circ 47'$ ¿Cuál es la medida del tercer ángulo del triángulo?

Problema 20

La suma de dos ángulos opuestos, a y b , de un cuadrilátero es el doble de la suma de los otros dos ángulos. Pruebe que la suma de los ángulos a y b es las dos terceras partes de la suma de los cuatro ángulos del cuadrilátero. Realice la figura del cuadrilátero para plantear el problema.

Problema 21

Se tienen los siguientes datos de un polígono regular de n lados:

$$\text{Área: } A = 240 u^2 \text{ (} u = \text{ unidades)}$$

$$\text{Lado: } l = 8 u$$

$$\text{Apotema: } a_n = 5 u$$

¿Cuántos lados tiene el polígono regular? ¿Qué nombre tiene este polígono?

Problema 22

El área de una circunferencia es igual a $\frac{7}{5}$ partes de su perímetro. ¿Cuál es el área y el perímetro de la circunferencia?

Problema 23

Un cilindro de radio $r = 13 u$ ($u =$ unidades) y altura $h = 18 u$, contiene una esfera inscrita tal que el espacio dentro del cilindro que queda fuera de la esfera es de volumen $355.72 u^3$. ¿Cuál es el volumen de la esfera? Realice un dibujo para plantear el problema.

Problema 24

Sea x un número entero, con $x \neq 1$. Pruebe que la fracción $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ siempre es un número entero. ¿Cuál es este número entero?

Problema 25

Por dos puntos distintos A y B en el plano, pasa una y sólo una recta. Si se tiene un heptágono regular, ¿cuántas rectas deben de pasar por sus vértices?

Problema 26

Considere el número

$$200920092009 \cdots 2009,$$

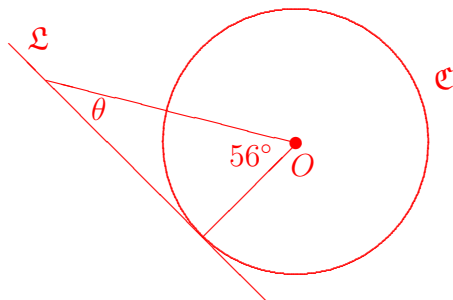
donde el número 2009 aparece n -veces. Pruebe que no importando la cantidad de veces en que aparece 2009, el número $200920092009 \cdots 2009$ es divisible por 2009, es decir, existe un número entero positivo y tal que

$$200920092009 \cdots 2009 = 2009 \cdot y.$$

Más aún, se puede probar que el número y tiene la forma de una fracción como la dada en el Problema 24.

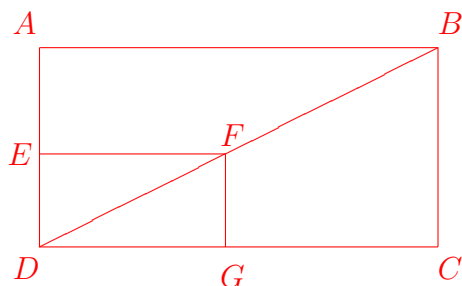
Problema 27

De acuerdo con la figura de abajo, ¿cuál debe de ser el valor del ángulo θ para que la recta \mathcal{L} sea tangente al círculo \mathcal{C} ?



Problema 28

De acuerdo con la figura de abajo, ¿cuánto deben de valer las longitudes de los segmentos \overline{DE} y \overline{FG} para que el área del rectángulo $\square DEFG$ sea $3/5$ partes del área del rectángulo $\square ABCD$?

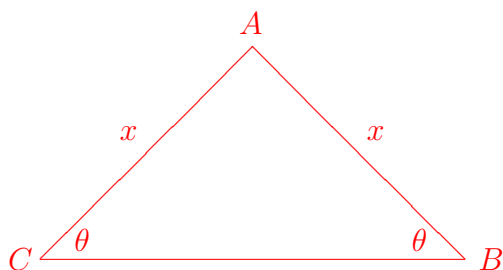


Problema 29

Encuentre las parejas ordenadas (x, y) de números reales tales que $x^2 + y^2 = 4$ e $y = 2 - x$.

Problema 30

Sea $\triangle BAC$ un triángulo isóceles el cual es rectángulo, como se muestra en la figura siguiente:



Pruebe que la longitud x es la raíz cuadrada del doble del área del triángulo $\triangle BAC$.

Contacto: **R. Mancio Toledo**

rmancio@esfm.ipn.mx, xolocate@yahoo.com.mx



“Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat Edición 2009” Guía–Problemario Nivel Medio Superior

Problema 1

El número 29209200920009200009... tiene 2009 dígitos, ¿Qué dígito está en el lugar de las unidades?

Problema 2

Encuentre las soluciones en los naturales que tiene la siguiente ecuación:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{2007} = 2009.$$

Problema 3

La suma de dos números es 5 y su producto es 7, ¿Cuál es la suma de sus recíprocos?

Problema 4

Encuentre el resultado del siguiente producto:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{4036081}\right)$$

Problema 5

Encuentre el área máxima de un rectángulo que tiene sus vértices sobre la circunferencia de ecuación:

$$(x - 29)^2 + (y + 29)^2 = 2009.$$

Problema 6

¿Cuántas parejas de primos hay tales que su suma sea 2009?

Problema 7

Un plano está coloreado con dos colores, demuestre que existen tres puntos del mismo color que forman un triángulo equilátero.

Problema 8

Sean x y y números reales que satisfacen

$$(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 14^2.$$

Encuentre el valor mínimo para $x^2 + y^2$.

Problema 9

A la sucesión de naturales: $\{1, 2, 3, \dots\}$ se le quitan todos los números que sean cuadrados perfectos. ¿Qué número quedó en el lugar 2009?

Problema 10

Encuentre el conjunto solución de la siguiente desigualdad:

$$2|x|^3 - 2x^2 - 5|x| + 2 < 0.$$

Problema 11

Sea $\alpha \in (0, \pi)$, demuestre la siguiente igualdad:

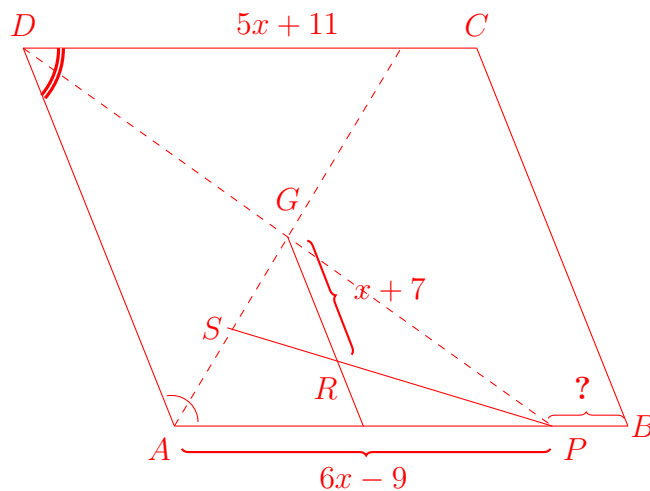
$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \dots \cos \frac{\alpha}{2^{2009}} = \frac{\sin(\alpha)}{2^{2009} \sin(\alpha/2^{2009})}.$$

Problema 12

Demuestre que de cualquiera cinco números enteros, no necesariamente distintos, existen tres números cuya suma es divisible por 3.

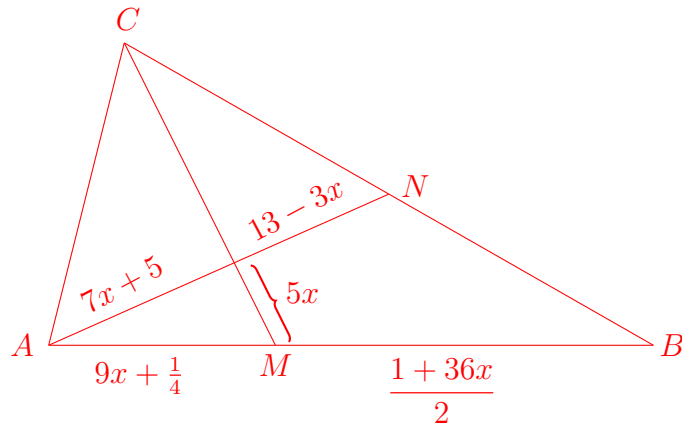
Problema 13

$ABCD$ es un paralelogramo DG y AG son bisectrices de los ángulos D y A , respectivamente. S y R son los puntos medios de \overline{AG} y \overline{AP} respectivamente. Con los datos indicados en la figura hallar la longitud del segmento \overline{PB} .



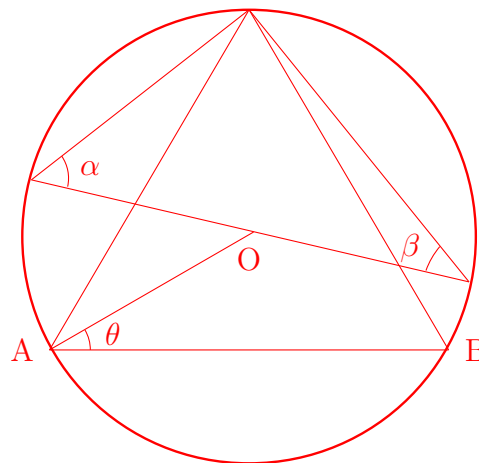
Problema 14

Hipótesis: N es el punto medio de \overline{CB} . Utilizando los datos que se indican en la figura, hallar la longitud del segmento \overline{CM}



Problema 15

Dada la figura siguiente, demostrar que $\alpha + \beta = \theta$



Problema 16

Si x, y, z son dígitos, encuentra todos los números de la forma $xyzx$ que son divisibles por 4 y 11.

Problema 17

Un vértice es la intersección de dos rectas distintas ¿Cuál es el máximo número de vértices que se pueden tener con n rectas?

Problema 18

¿De que forma puede dividirse un número como suma de dos sumandos positivos para que el producto de sus partes sea máximo?

Problema 19

Muestre las cantidades

$$(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + n + 1$$

para $n \in \mathbb{N}$ no son primos.

Problema 20

Muestre que el número $a^4 + 4$ para $a \in \mathbb{Z}$ y $a \neq \pm 1$, no es primo.

Problema 21

Calcule el área de un triángulo equilátero inscrito en un círculo de radio uno.

Problema 22

¿Cuál es la última cifra del número 736^{8658} ?

Problema 23

Muestre que el producto de dos números cuyas últimas cifras son iguales a 76, tendrán también las últimas cifras iguales a 76.

Problema 24

Muestre que un número es divisible por 19 sólo en el caso en que sus decenas más el doble de sus unidades forme un múltiplo de 19.

Problema 25

Se dispone de 100 pesos para comprar sellos de 1, 4 y 12 pesos. ¿Cuántos sellos de cada uno de estos precios deberán comprarse?

Problema 26

Un rectángulo tiene lados de longitudes enteras. ¿Cuál será la longitud de dichos lados para que el perímetro y la superficie sean iguales?

Problema 27

En un fiesta regional se necesitaban grillos para elaborar una antigua receta, se le dijo a un niño que por el primer grillo recibiría un peso, por el segundo 2 pesos, por el tercero 4, por el cuarto 8 pesos y así consecutivamente. Si al final el niño recibió 255 pesos. ¿Cuántos grillos recolectó?

Problema 28

Un agricultor vendió al primer comprador la mitad de los aguacates de su parcela más medio aguacate de prueba; al segundo comprador, la mitad de los restantes más medio aguacate de prueba y así sucesivamente. Al llegar al séptimo comprador los aguacates se habían terminado. ¿Cuántos aguacates tenía el agricultor?

Problema 29

Usando logaritmos y radicales, expresar cualquier número entero positivo mediante tres números dos.

Problema 30

El jefe de un autolavado le dice a sus trabajadores que por n autos que laven, les pagara $an^3 + b$ pesos. Si uno de ellos por 1 auto gana 5 pesos y otro por tres autos gana 83 pesos; ¿Cuántos autos lavo un trabajador que gana 26 pesos?

Contacto: **R. Mancio Toledo**

rmancio@esfm.ipn.mx, xolocate@yahoo.com.mx



“Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat Edición 2009”

Guía–Problemario Nivel Superior

Problema 1

Comience con el segmento $[0, 1]$, después divida el segmento en cinco partes y remueva la segunda y cuarta partes, a las partes que le quedan, vuelva a dividir las en cinco y remueva otra vez las segundas y cuartas partes. Si repite el proceso n veces, ¿Cuál es la longitud de los segmentos que a ido quitando? Si pudiera repetir el proceso al infinito ¿Cuál sería la longitud final de los segmentos que quita?

Problema 2

Sean m, n números enteros con $0 \leq n \leq m$. Demostrar las igualdades siguientes:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} = 2^n \binom{m}{n}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} = 0.$$

Problema 3

Demostrar que para todo $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\sin 5\theta = 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta$$

$$\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta.$$

Problema 4

Sea $(a_n)_n$ la sucesión de números reales construida de la siguiente manera:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2} \quad \text{para todo } n > 2.$$

Demostrar que la sucesión es convergente y encontrar su límite.

Problema 5

Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomios no ambos cero. Demostrar que $(p(x), q(x))$ en $\mathbb{R}[x]$ tiene coeficientes racionales.

Problema 6

Existirá una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que transforme la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$?

Problema 7

Sea \mathcal{V} el \mathbb{R} -espacio vectorial de todas las funciones continuas de $[0, 1]$ a \mathbb{R} . Sea $g \in \mathcal{V}$ una función fija. Se define la función $\varphi_g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\varphi_g(f) = \int_0^1 fg.$$

- i) Demostrar que φ_g es una funcional lineal sobre \mathcal{V} .
- ii) Demostrar que si $\varphi_g(f) = 0$ para toda $g \in \mathcal{V}$, entonces $f = 0$.

Problema 8

Sea $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. ¿Es posible construir una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua únicamente en A ?

Problema 9

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $g(x) = \sqrt{|x^2 - 4|} - x$.

- i) Demostrar que g es continua.
- ii) ¿En qué puntos de \mathbb{R} la función g no es derivable?
- iii) ¿Es cierto que g tiene dos mínimos locales consecutivos?
- iv) ¿Es cierto que los puntos extremos de g ocurren en los puntos en donde g no es diferenciable?
- v) ¿Es g integrable en $[-2, 2]$?, en cuyo caso encontrar $\int_{-2}^2 g(x) dx$.
- vi) ¿Es g integrable en todo intervalo de la forma $[a, b]$ de \mathbb{R} que contenga propiamente a $[-2, 2]$?

Problema 10

Encontrar los dominios de definición, de continuidad y de derivabilidad de las siguientes funciones:

$$i) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x + 6 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

$$ii) \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

$$iii) \quad h(x) = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\}.$$

$$iv) \quad \ell(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Problema 11

Sean $J = (0, 1)$, $S = J \times J$. Tomando expansiones decimales se definen las siguientes funciones:

1) $\phi : J \rightarrow S$ dada por:

$$\phi(0.a_1a_2a_3a_4 \cdots) = (0.a_1a_3a_5a_7 \cdots, 0.a_2a_4a_6a_8 \cdots).$$

2) $\psi : S \rightarrow J$ dada por:

$$\psi(0.a_1a_2a_3a_4 \cdots, 0.b_1b_2b_3b_4 \cdots) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4 \cdots.$$

i) ¿Son las funciones ϕ , ψ , continuas, inyectivas, o suprayectivas?

ii) ¿La existencia de las funciones ϕ y ψ , permiten afirmar sin lugar a dudas que los conjuntos J y S tienen la misma cardinalidad?

Problema 12

Si a es un número real, analizar la convergencia o divergencia de la sucesión de matrices:

$$\left(\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix} \right)_n$$

Problema 13

Construir una función $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga las siguientes condiciones:

i) $\varphi(a\vec{v}) = a\varphi(\vec{v})$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ y para todo $a \in \mathbb{R}$

ii) φ no es una funcional lineal.

Problema 14

Sea $A = [0, 1] \cup (2, 3]$ y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = 1$ para toda $x \in A$. Encontrar dos primitivas F y G de f en A tales que $F(x) - G(x) = g(x)$ con $g(x)$ una función no constante en A .

Problema 15

Sea $(a_n)_n$ la sucesión de números reales, definida por inducción como sigue:

$$a_1 > -1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n - \ln(1 + a_n)}{a_n^2}.$$

¿Para qué valores de a_1 la sucesión es convergente y para cuáles es divergente?

Problema 16

Resolver las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}, \quad \int \frac{x dx}{(-2x^2 + x + 1)^{3/2}}, \quad \int \frac{dx}{\left(x + \sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2}.$$

Problema 17

Sea P un plano de \mathbb{R}^4 . Demostrar que existe un plano Q de \mathbb{R}^4 ortogonal a P y tal que $P \cap Q$ se reduce a un sólo punto.

Problema 18

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demostrar que $AB = BA$ para toda matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si y sólo si existe un número $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ tal que $A = kI_n$, con I_n la matriz identidad de tamaño $n \times n$.¹

Problema 19

i) Exhibir dos matrices reales A, B de tamaño 3×3 con las siguientes propiedades:

- ◇ A y B sean diagonalizables.
- ◇ $A + B$ no sea diagonalizable.

ii) Si A y B son matrices reales diagonalizables de tamaño $n \times n$, demostrar que $A + B$ es diagonalizable si y sólo si $AB = BA$.

¹ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ denota al conjunto de matrices reales de tamaño $n \times n$.

Problema 20

Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$g(x, y) = f(x + cy),$$

en donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y $c \in \mathbb{R}$. Demostrar que:

$$c \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Problema 21

Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable con continuidad y tal que:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Demostrar que existe una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y tal que:

$$g(x, y) = f(x + y).$$

Problema 22

Demostrar que existen dos sucesiones $(r_n)_n, (t_n)_n$ de números racionales triádicos que satisfacen las propiedades:

i) $r_n < \sqrt{2} < t_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

ii) $r_n \rightarrow \sqrt{2}, t_n \rightarrow \sqrt{2}$.

iii) $t_n - r_n < \frac{1}{3^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 23

Utilizando la serie geométrica, encontrar el número racional r al que es igual la expansión decimal periódica:

$$k.a_1a_2a_3a_4a_5\overline{777} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}^+, a_i \neq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, 5.$$

Problema 24

Calcular la suma de las series.

i) $\frac{1^2}{0!} + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{4^2}{3!} + \dots$

ii) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \dots$

Problema 25

Sean $x, y, z \geq 1$ y $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Demostrar que

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Problema 26

¿Para que valores de $n \in \mathbb{N}$, el número $n^4 + 4^n$ es primo?

Problema 27

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ los puntos extremos de un diámetro de la circunferencia C . Demostrar que la ecuación de la circunferencia C es:

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

Problema 28

¿Cuántas tangentes tiene la curva

$$y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$$

que sean paralelas a la recta $16x - y + 5 = 0$? Encontrar sus ecuaciones.

Problema 29

Sea Q la curva con ecuación $y^2 + 2y = x^2$. Demostrar que

$$y'' = \frac{1}{(1+y)^3}, \quad y''' = \frac{-3x}{(1+y)^5}.$$

Problema 30

Sea $A \in \mathcal{M}_{10}(\mathbb{R})$. Si el polinomio mínimo de A es $x(x-1)^2(x+7)^2$, ¿cuántas y de que forma son las posibles formas canónicas de Jordan de la matriz A ?

Contacto: **R. Mancio Toledo**

rmancio@esfm.ipn.mx, xolocate@yahoo.com.mx