Las ecuaciones de Maxwell: la unificación de la electricidad, el magnetismo y… ¿la luz?

E. N. García Quiroz, D. Ramírez Rosales
Departamento de Física, ESFM-IPN, Ciudad de México, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55050 Fax (55) 5729-55015 E-mail: egarciaq1600@alumno.ipn.mx

***Resumen* — En los inicios del estudio de los campos eléctricos y magnéticos estos eran considerados como fenómenos independientes uno de otro. Posteriormente Maxwell, al analizar las leyes formuladas por otros científicos, obtuvo una serie de ecuaciones, que con el trabajo de otros científicos se redujeron a cuatro, las ahora llamadas ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones demuestran que los campos eléctricos y magnéticos están relacionados, y que hasta se pueden crear campos eléctricos con campos magnéticos y viceversa. El objetivo de este artículo es analizar esas ecuaciones e interpretar sus implicaciones físicas, concluyendo que se induce campo eléctrico cuando el flujo de campo magnético cambia con el tiempo, y lo mismo ocurre con el campo magnético, el cual se induce a causa del cambio de flujo de campo eléctrico con respecto al tiempo. Aquí se menciona también la existencia de ondas electromagnéticas, y su relación con la luz, al tener ambas la misma rapidez de propagación.**

Palabras Clave – **Ecuaciones de Maxwell, campo eléctrico, campo magnético, flujo, gradiente, divergencia, rotacional**

Abstract — **At the beginning of the study of electric and magnetic fields, they were considered as independent phenomena. Later Maxwell, analyzing the laws of other scientists, obtained a series of equations, which were reduced to four, the now called Maxwell's equations. These equations show that electric and magnetic fields are related, and those electric fields can even be created with magnetic fields, and vice versa. The purpose of this article is to analyze these equations and give an interpretation of their physical implications, concluding that electric field is induced when the flux of magnetic field changes with time, and the same happens for the magnetic field, which is induced due to the change of flux of electric field with respect to time. Here the existence of electromagnetic waves is also mentioned, and their relationship with light, as both have the same speed of propagation.**

Keywords — **Maxwell's equations, electric field, magnetic field, flux, gradient, divergence, rotational**

I. Introducción

El estudio de los campos eléctricos y magnéticos es algo que ha evolucionado y tenido cambios de enfoque con el pasar del tiempo. Al principio solo se consideraban como trucos de magia; se conocían sus efectos, pero no se entendían totalmente. Después se formalizó el estudio de estos fenómenos, pero se consideraban a los campos eléctricos y magnéticos como fenómenos totalmente distintos entre sí. Fue Maxwell quien demostró la estrecha relación entre ellos, teniendo ahora una manera muy distinta de comprenderlos, y su influencia en el entendimiento de otros fenómenos, como los de la luz.

II. Vida y trabajo de Maxwell

James Clerk Maxwell nació el 13 de julio de 1831, en Edimburgo, Escocia. Su padre se llamaba John Clerk, y adoptó el nombre de Maxwell al heredar propiedades a través de un matrimonio con la familia Maxwell. James recibió educación en casa hasta que cumplió 11 años y fue enviado a la escuela, llamada Edinburg Academy, donde recibió formación matemática rigurosa. A la edad de 15 años publicó su primer artículo científico, sobre la geometría de las curvas cónicas [1].

Maxwell fue criado en un ambiente donde el arte estaba muy presente. Su familia practicaba y apreciaba las actividades artísticas, viéndose esto reflejado en Maxwell, ya que también escribía poesía [2], [3].

En 1847 ingresó a la universidad de Edimburgo, donde, en sus tiempos libres (incluyendo vacaciones), utilizaba los aparatos del laboratorio para sus experimentos, puestos sobre una "mesa de laboratorio" compuesta por una puerta colocada sobre dos barriles. Maxwell dejó esa universidad para asistir a la universidad de Cambridge, en donde existía un sistema de exámenes con énfasis en matemáticas y física teórica, llamado Tripos matemático. El sistema consistía en dos partes, en la primera los estudiantes tenían que afrontar pruebas todas las mañanas y tardes, por cuatro días, para después los profesores corregir esos exámenes en 10 días, y seguir con la segunda parte, más complicada que la primera y con una duración de 5 días. Este sistema de exámenes era tan complejo, que los profesores, incluso, aplicaban ejercicios que ni ellos mismos sabían resolver y esperaban que algún estudiante brillante pudiera hacerlos. De esos exámenes surgieron teoremas importantes, como el teorema de Stokes.

Cuando Maxwell participó en el Tripos matemático obtuvo el segundo lugar, siendo superado por Edward Routh, físico centrado en la mecánica teórica, cuyas aportaciones no se acercan a las de Maxwell [1].

En 1857, como parte de un concurso en la universidad de Cambridge, Maxwell presentó un trabajo acerca de la estabilidad de los anillos de Saturno, proponiendo que estos deben estar constituidos por muchas partículas sin interacción entre sí, a diferencia de la idea que se tenía en ese tiempo, que era que los anillos se componían de un fluido. El trabajo de Maxwell fue muy impresionante por la manera en la que aplicó las matemáticas para descubrir algo que, en 1895, fue confirmado; los anillos de Saturno realmente son compuestos por algo semejante a partículas desconectadas entre sí [1].

En 1873 Maxwell publicó su gran obra, Tratado de Electricidad y Magnetismo, donde son unificados todos los fenómenos de electricidad y magnetismo. Ahí propone la existencia de ondas electromagnéticas, además que la luz es una onda de este tipo y presentando las ecuaciones que describen dichos fenómenos. Aunque Maxwell planteó 20 ecuaciones, en 1884 fueron sintetizadas en 4 ecuaciones que se detallan más adelante.

Las ecuaciones de Maxwell tienen una importancia comparable con las leyes de Newton. Resulta impresionante que con tan solo 4 ecuaciones se puede analizar todo fenómeno electromagnético. Es por ello por lo que este artículo se enfoca en esas ecuaciones, pero para hablar de ellas hay que conocer primero los conceptos que dichas ecuaciones involucran.

III. Conceptos

A. *Campo vectorial*

En física un campo vectorial es un lugar del espacio donde se encuentra, en todo punto, cierta cantidad física que cuenta con magnitud y dirección [4], como la gravedad, por ejemplo. En la Fig. 1 se aprecia el campo gravitacional producido por la Tierra y la Luna.

B. *Líneas de campo*

Una manera de representar gráficamente a los campos vectoriales es utilizando líneas de campo, las cuales son curvas que siguen la trayectoria marcada por los vectores del campo. En la Fig. 1 se aprecian las curvas que los vectores van formando, y en la Fig. 2 se muestran las líneas de campo gravitacional producidas únicamente por la Tierra

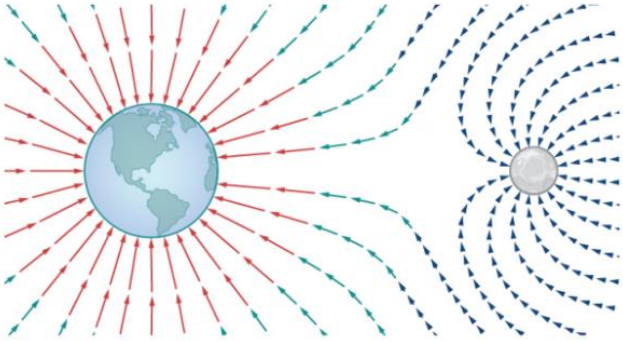

Fig. 1. Campo gravitacional de la Tierra y la Luna [5]

C. *Flujo*

Las líneas de campo permiten explicar de manera intuitiva el concepto de flujo, el cual consiste en una medición de la cantidad de líneas de campo que atraviesan una superficie dada, o bien, la intensidad con la que están atravesando los vectores del campo dicha superficie. Para entender mejor el flujo se puede hacer la analogía con el flujo de agua. A través del área vertical de la Fig. 3 circula cierta cantidad de agua, pero por el área inclinada circula una cantidad menor, entonces el flujo en el área vertical es mayor al de la inclinada. Si sustituimos esa cantidad de partículas de agua por cantidad de líneas de campo, se obtiene la misma conclusión; el flujo de campo en el área vertical es mayor que en el área inclinada. Definido de manera matemática, el flujo de campo vectorial es definido en la ecuación (1), con Φ el flujo, $\boldsymbol{F}$ el campo vectorial y A el área transversal, a la cual se le asigna una dirección normal a dicha área y, para superficies cerradas (como una esfera), dicha dirección se asigna de tal manera que apunta hacia afuera de la superficie [7].

$$\Phi=\int \boldsymbol{F}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A}. \tag{1}$$

D. *Campo eléctrico*

Los átomos se componen básicamente de electrones, protones y neutrones (aunque actualmente se sabe que los nucleones se pueden subdividir), estas partículas cuentan con una propiedad llamada carga eléctrica, la cual es un concepto tan básico que no tiene una definición exacta; la carga se conoce más por sus efectos que por lo que es. Las cargas eléctricas experimentan cierta fuerza entre sí, y se rigen de acuerdo con el hecho de que cargas de signo opuesto se atraen y las cargas de mismo signo se repelen. Tomando esto en cuenta, se define el campo eléctrico como el intermediario para que esas fuerzas se den, es decir, una carga genera campo eléctrico que interactúa con otras cargas, generando así una fuerza dada por (2), donde $\boldsymbol{F}$ es la fuerza que experimenta la carga q, y $\boldsymbol{E}$ es el campo eléctrico que actúa sobre dicha carga [7].

$$\boldsymbol{F}= q\boldsymbol{E}. \tag{2}$$

Hay que resaltar que el campo eléctrico “emerge” de las cargas positivas y “entra” a las cargas negativas, como se ve en la Fig. 4

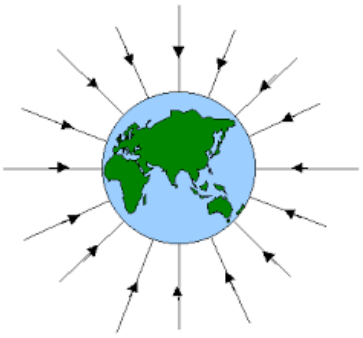

Fig. 2. Líneas de campo gravitacional de la Tierra [6]

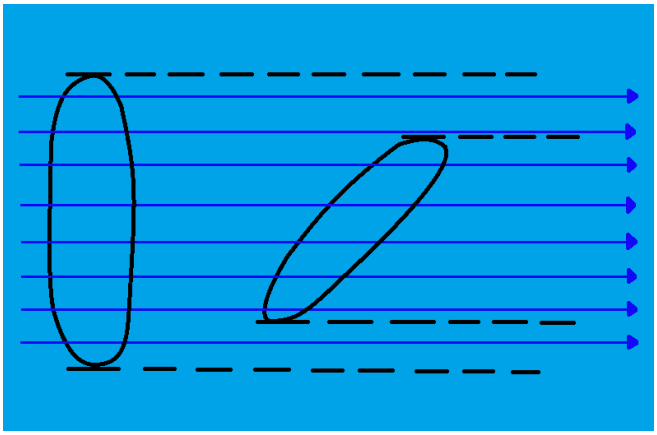

Fig. 3. Flujo de agua a través de dos áreas, una vertical y la otra inclinada

E. Campo magnético

Los imanes generan algo llamado campo magnético, que es el intermediario por el cual dichos imanes y las corrientes eléctricas interactúan con cargas en movimiento, las cuales experimentan una fuerza (perpendicular tanto al campo magnético como a la velocidad de la carga) dada por (3), con $\boldsymbol{F}$ la fuerza sobre la carga q, que tiene velocidad $\boldsymbol{v}$ y sobre la cual actúa un campo magnético $\boldsymbol{B}$ [7].

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}\mathrm{X}\boldsymbol{B}. \tag{3}$$

También se dan interacciones entre imanes, comportándose de manera semejante a las cargas eléctricas. Así como existen cargas positivas y negativas; los imanes tienen el polo norte y sur, siendo el polo norte de donde salen las líneas de campo magnético y el sur donde entran. En campos magnéticos, hasta ahora, se ha observado que siempre se dan los polos a pares, es decir, todo polo norte viene con un polo sur, a diferencia de las cargas eléctricas, donde sí se puede tener solamente carga positiva o solamente carga negativa. Aun así, en campos magnéticos también se cumple que polos opuestos se atraen y polos iguales se repelen. La Fig. 5 muestra las líneas de campo magnético en un imán.

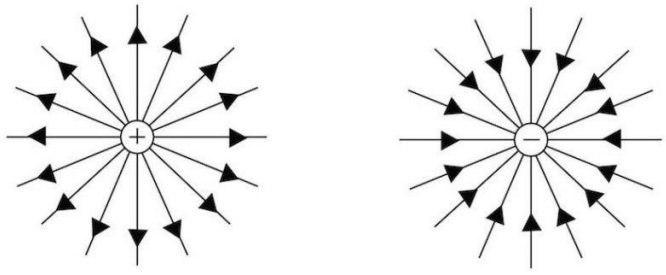

Fig. 4. Campo eléctrico generado por una carga positiva (izquierda) y una negativa (derecha) [8]

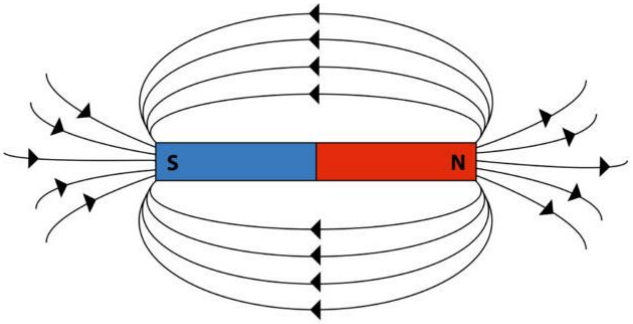

Fig. 5. Campo magnético generado por un imán [9]

F. Gradiente, divergencia y rotacional

Para desarrollar las ecuaciones de Maxwell es importante conocer el operador nabla, denotado por ∇ y definido por (4).

$$\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i}+(\partial/\partial y)\mathbf{j}+(\partial/\partial z)\mathbf{k}. \tag{4}$$

Con dicho operador, dado un campo escalar φ (que es un lugar del espacio en cuyos puntos se encuentra una cantidad física que solo cuenta con magnitud, pero no dirección) se define el gradiente como se ve en (5).

$$\nabla\varphi = (\partial\varphi/\partial x)\mathbf{i}+(\partial\varphi/\partial y)\mathbf{j}+(\partial\varphi/\partial z)\mathbf{k}. \tag{5}$$

Si se tiene un campo vectorial $\boldsymbol{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$, entonces se define la divergencia como en (6).

$$\nabla\bullet\boldsymbol{F} = (\partial F_1/\partial x)+(\partial F_2/\partial y)+(\partial F_3/\partial z). \tag{6}$$

Y también con el mismo campo se puede definir el rotacional de $\boldsymbol{F}$, dado por (7) [10].

$$\nabla\mathrm{X}\boldsymbol{F} = [(\partial/\partial x)\mathbf{i}+(\partial/\partial y)\mathbf{j}]\mathrm{X}(F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}). \tag{7}$$

Para comprender mejor la física de las ecuaciones de Maxwell hay que conocer la interpretación geométrica del gradiente, la divergencia y el rotacional.

En el gradiente se maneja un campo escalar, y se obtiene un vector; el cual apunta en la dirección de mayor cambio de dicho campo, por ejemplo, el potencial gravitacional de un planeta aumenta conforme nos alejamos de dicho cuerpo, y al hacer el gradiente del potencial, obtenemos vectores radiales al planeta que apuntan hacia afuera de este.

En la divergencia se manejan campos vectoriales y se obtienen escalares. En este caso lo que nos dicen dichos escalares es si el campo está expandiéndose (cuando el escalar es positivo) o contrayéndose (cuando el escalar es negativo), y, con relación del nombre de esta operación, se puede decir que la divergencia muestra si el campo vectorial converge a un punto o diverge de este. En el caso en el que la divergencia es igual a cero no se puede asegurar ninguno de los dos casos, ahí depende del campo que se esté considerando [11].

Para interpretar el rotacional hay que hacer la analogía con agua circulando. Si dentro de ella ponemos una hélice de dos aspas, alineadas de manera perpendicular a la velocidad del agua, entonces podemos observar dos cosas; si la cantidad de agua que golpea un aspa es la misma que la que golpea a la otra, entonces la hélice no rota, pero si una de las aspas recibe más agua que la otra, entonces la hélice rotará. Ahora en lugar de agua consideremos vectores, entonces el rotacional nos dice si el aspa va a rotar o no, es decir, si el campo está o no distribuido uniformemente en el espacio [12].

IV. Ecuaciones de Maxwell

A. *Ley de Gauss*

La ley de Gauss dice que se genera flujo de campo eléctrico si y sólo si existe una fuente (carga eléctrica, que puede ser no puntual) que produzca dicho campo, es decir, nos permite relacionar el flujo de campo eléctrico a través de una superficie material o hipotética. Esta superficie (llamada superficie gaussiana) debe ser cerrada y encerrar a la carga. Esta ley es descrita por (8), la cual es la forma integral de una de las ecuaciones de Maxwell, donde $\boldsymbol{E}$ es el campo eléctrico que atraviesa dicha superficie de área $\boldsymbol{A}$ y encierra una carga q, ε es una constante llamada permitividad eléctrica. El flujo es el que aparece del lado izquierdo de la ecuación [13].

$$\oiint \boldsymbol{E}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A} = q/\varepsilon. \tag{8}$$

El medio en el cual está la superficie gaussiana afecta al campo eléctrico que pasa a través de ella. Existen materiales que, al pasar campos eléctricos a través de ellos, experimentan una alineación en las cargas de sus moléculas, de tal manera que se genera un campo eléctrico que se opone al campo externo (el generado por la carga encerrada). Como resultado aparece un campo eléctrico menor [7]; es por ello que en la ecuación de la ley de Gauss se considera la constante de permitividad eléctrica, la cual da una medida de qué tan fácil es inducir campo eléctrico en los materiales.

Para obtener un flujo de campo eléctrico distinto de cero a través de una superficie cerrada debe haber carga encerrada en dicha superficie, ya que si no se estuviera encerrando carga se tendría una situación en la que las líneas de campo eléctrico entran en una parte de la superficie, pero salen en otra, que es algo semejante a sumar algo y luego restarlo; dando como resultado un flujo igual a cero. Esta situación se muestra en la Fig. 6, donde la superficie cerrada está sombreada en verde y el campo eléctrico es generado por una carga positiva, pero que está afuera de la superficie.

Existe una forma diferencial de la ley de Gauss, que para deducirla se utiliza el teorema de la divergencia. El teorema dice que, dada una superficie cerrada $\boldsymbol{A}$ y un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ con derivadas de primer orden continuas, se cumple (9), donde $\boldsymbol{V}$ es el volumen encerrado por la superficie $\boldsymbol{A}$ [10].

$$\oiint \boldsymbol{F}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \iiint (\nabla\bullet \boldsymbol{F})\mathrm{d}\boldsymbol{V}. \tag{9}$$

Entonces en el caso del flujo de campo eléctrico de (8) se obtiene (10) al aplicar el teorema de la divergencia

$$\iiint (\nabla\bullet \boldsymbol{E})\mathrm{d}\boldsymbol{V} = q/\varepsilon. \tag{10}$$

La carga puede ser puntual o estar distribuida en una extensión lineal (λ), de área (σ) o de volumen (ρ). Aquí utilizaremos la densidad volumétrica de carga, la cual cumple con (11).

$$q = \iiint \rho \mathrm{d}\boldsymbol{V}. \tag{11}$$

Luego ε es una constante, por lo que al sustituir q de (11) en (10) se obtiene (12)

$$\iiint [(\nabla\bullet \boldsymbol{E}) - (\rho/\varepsilon)]\mathrm{d}\mathbf{V} = 0. \tag{12}$$

Lo cual permite inferir la forma diferencial de la ley de Gauss, dada por (13) [13]

$$\nabla\bullet \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon. \tag{13}$$

La ecuación (13) muestra matemáticamente el hecho de que el campo eléctrico sale de las cargas positivas (divergencia positiva) y entra en las cargas negativas (divergencia negativa).

B. *Ley de Gauss para el magnetismo*

Para esta ley se considera el flujo de un campo vectorial (campo magnético) a través de una superficie cerrada. Hasta ahora sabemos que todo polo está acompañado de su polo opuesto. Esto es, toda línea de campo magnético que entra a la superficie a causa del polo sur sale en otro lugar de la misma superficie, a causa del polo norte, por lo que el flujo de campo magnético en superficies cerradas siempre es nulo (esa es la ley de Gauss para el magnetismo). La ecuación que describe esta ley es otra de las ecuaciones de Maxwell, la cual está dada en (14), donde $\boldsymbol{B}$ es el campo magnético y $\boldsymbol{A}$ es el área de la superficie que se está considerando

$$\oiint \boldsymbol{B}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0. \tag{14}$$

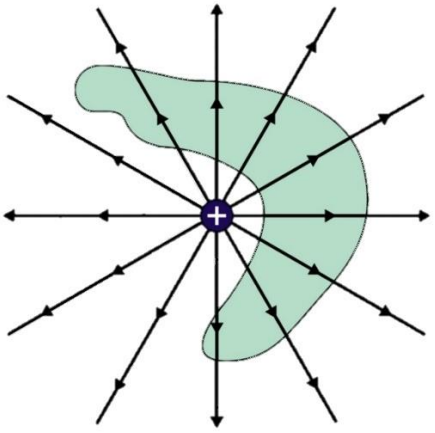

Fig. 6. Superficie que no encierra carga, pero por la cual sí existe un campo eléctrico cruzando [14]

Utilizando el teorema de la divergencia y haciendo un procedimiento semejante al que se hizo con la ley de Gauss se llega a la forma diferencial de esta ecuación de Maxwell (15) [13]

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{15}$$

C. Ley de Ampère

Hasta este punto pareciera que las ecuaciones de Maxwell solo son una compilación de ecuaciones descritas anteriormente por otros científicos. Pero en la ecuación que se analiza a continuación se nota la gran influencia que tuvo Maxwell, ya que la ley de Ampère dice que las corrientes eléctricas son capaces de generar campos magnéticos, los cuales son perpendiculares a la dirección de circulación de dichas corrientes. Este hecho se descubrió experimentalmente en un laboratorio donde se tenían aparatos eléctricos, y una brújula. La brújula debía de apuntar al norte, pero no lo hacía. Al observar este hecho anómalo se empezaron a hacer experimentos buscando la causa que generaba esa desviación, llegando a la conclusión de que las corrientes que circulaban por esos aparatos producían ese cambio. Esto es, al tener un alambre por el que circula corriente y una brújula cerca de él, se observa que la aguja de la brújula apunta de manera perpendicular al alambre, no al norte del campo magnético de la Tierra, como se ve en la Fig. 7.

La ecuación que describe a la ley de Ampère es (16), donde $\boldsymbol{B}$ es el campo magnético que circula por una trayectoria cerrada S (anillo amperiano). Dicho campo es generado por una corriente i que atraviesa a la superficie encerrada por la trayectoria que se está considerando [7].

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \mu i. \tag{16}$$

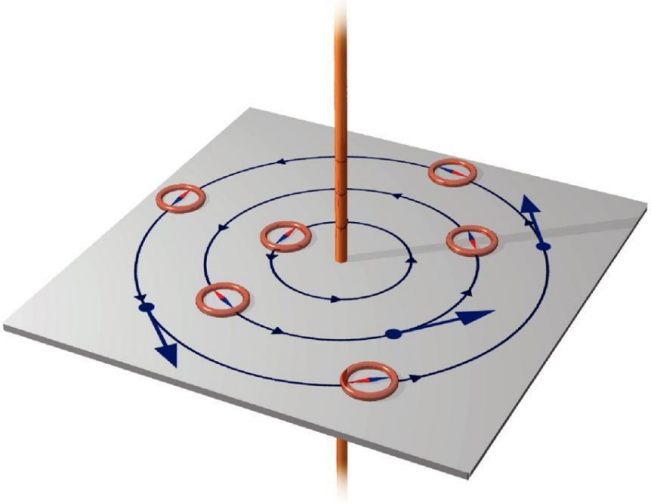

Fig. 7. Alineación de las brújulas al hacer pasar corriente por un alambre [15]

La dirección de d$\boldsymbol{S}$ es una tal que es normal a la superficie, μ es la constante de permeabilidad magnética, la cual se considera ya que el material por el que pasa el campo magnético puede alterar a este último. La constante μ da una medida de cuánto permite el material el paso de campo magnético.

Considerando el teorema de Stokes, el cual dice que, si tenemos una curva cerrada simple S que delimita a una superficie abierta A, y si tenemos también un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ que admite derivadas de primer orden continuas, entonces se cumple (17), donde la dirección de d$\boldsymbol{S}$ es normal a A, y la dirección de d$\boldsymbol{A}$ es la misma que la asignada a d$\boldsymbol{S}$ [10].

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{A} \tag{17}$$

Entonces, utilizando este teorema en (16) se obtiene (18).

$$\iint (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{A} = \mu i. \tag{18}$$

Notemos que en el teorema de Stokes la única condición que se tiene para la superficie A es que esté delimitada por S. Veamos lo que ocurre al considerar un alambre conectado a un capacitor de placas paralelas cuando pasa corriente a través del alambre, como lo muestra la Fig. 8. En ella observamos que en (a) hay cierta corriente i que atraviesa a la superficie del anillo amperiano, por lo que el término de la izquierda de (18) es distinto de cero. En (b) aparentemente no hay corriente atravesando al anillo amperiano, obteniendo así que el término izquierda de (18) sea cero, es decir, se obtienen dos resultados distintos. Para evitar esa incongruencia Maxwell propuso el concepto de corriente de desplazamiento, que es una corriente que se da a causa de las variaciones de flujo de campo eléctrico que hay entre las placas del capacitor. Dicha corriente está dada por (19), en donde es representada como i_d, y Φ_E es el flujo de campo eléctrico [7].

$$i_D = \varepsilon(\partial \Phi_E / \partial t). \tag{19}$$

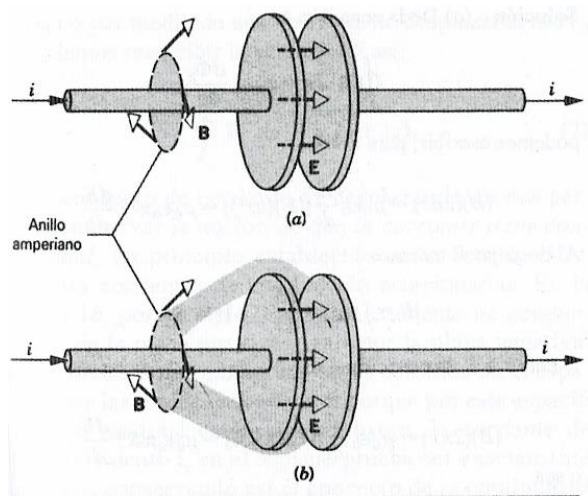

Fig. 8. Sistema de alambre y capacitor, en (a) y (b) se considera el mismo anillo amperiano, pero la superficie de (a) encierra al alambre, mientras que la superficie de (b) atraviesa el espacio entre las placas del capacitor [7]

Con esa aportación se obtiene, la que en este documento es, la tercera ecuación de Maxwell, descrita por (20)

$$\oint \boldsymbol{B} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mu[i+\varepsilon(\partial \Phi_E/\partial \mathrm{t})] = \mu(i+i_D). \qquad (20)$$

Entonces la ecuación (18) también se modifica, resultando la ecuación (21)

$$\iint(\nabla \mathrm{X}\boldsymbol{B})\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mu(i+i_D). \qquad (21)$$

La corriente que pasa por el alambre se puede expresar utilizando la densidad de corriente, denotada por **j** y definida en la ecuación (22), donde *A* es el área transversal del alambre, y le es asignada una dirección normal a dicha área.

$$i = \iint \boldsymbol{j} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A}. \qquad (22)$$

Además, como el capacitor es de placas paralelas, la carga *Q* que tiene almacenada cumple con la ecuación (23), donde *A'* es el área de las placas y *E* la magnitud del campo eléctrico entre las placas del capacitor

$$Q/A' = \varepsilon E. \qquad (23)$$

Entonces, derivando con respecto al tiempo el lado izquierdo y derecho de (23), se obtiene (24)

$$(1/A')\partial Q/\partial \mathrm{t} = \varepsilon \partial E/\partial \mathrm{t}. \qquad (24)$$

El lado izquierdo de la ecuación (24) consiste en una densidad de corriente, la cual Maxwell llamó densidad de corriente de desplazamiento, representada por $\boldsymbol{J_D}$ y descrita por la ecuación (25)

$$\boldsymbol{J_D} = \varepsilon \partial \boldsymbol{E}/\partial \mathrm{t}. \qquad (25)$$

Entonces la corriente de desplazamiento está dada por (26)

$$i_D = \iint \boldsymbol{J_D} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A}. \qquad (26)$$

Y al sustituir $\boldsymbol{J_D}$ de (25) en (26), se obtiene la ecuación (27)

$$i_D = \iint (\varepsilon \partial \boldsymbol{E}/\partial \mathrm{t}) \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A}. \qquad (27)$$

Ahora se cuenta con el valor de *i* dado por (22) y el valor de i_D dado por (27), entonces, sustituyendo esas variables en (21) se obtiene (28)

$$\iint(\nabla \mathrm{X}\boldsymbol{B})\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mu\{\iint[\boldsymbol{j}+(\varepsilon \partial \boldsymbol{E}/\partial \mathrm{t})]\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A}\}. \qquad (28)$$

Finalmente, de la ecuación (28) se deduce la forma diferencial de la tercera ecuación de Maxwell, la cual es (29) [13]

$$\nabla \mathrm{X}\boldsymbol{B} = \mu[\boldsymbol{j}+(\varepsilon \partial \boldsymbol{E}/\partial \mathrm{t})]. \qquad (29)$$

La ecuación (20) muestra que se genera campo magnético si y sólo si el medio lo permite y si existe corriente o si se da una variación en el flujo de campo eléctrico con respecto al tiempo. La ecuación (29) muestra que campos eléctricos que varían con respecto al tiempo generan campos magnéticos.

D. Ley de inducción de Faraday

Esta ley establece que al variar el flujo de campo magnético a través de una espira se induce en ésta una fuerza electromotriz (o fem), la cual por la ley de Lenz se sabe que tiene una dirección tal que se opone al cambio de dicho flujo.

Esta ley también está relacionada con las aportaciones de Maxwell al electromagnetismo, ya que inicialmente no tenía formalidad matemática debido a que Michael Faraday (el científico que la planteó) no contaba con matemática suficiente, pero sí era un físico y químico muy habilidoso en cuanto a lo experimental [1]. Entonces Maxwell planteó matemáticamente la ley de Faraday, obteniendo así la ecuación (30), donde ε es la fem inducida, $\Phi_B = \iint \boldsymbol{B} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ es el flujo de campo magnético, *N* es el número de espiras y el signo menos da la dirección de la fem.

$$\varepsilon = -N(\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{dt}) = -N\mathrm{d}(\iint \boldsymbol{B} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A})/\mathrm{dt}. \qquad (30)$$

De este fenómeno surgió la teoría de que la variación del flujo de campo magnético induce campo eléctrico, el cual es descrito por (31), donde $\boldsymbol{E}$ es dicho campo eléctrico y *S* es una trayectoria cerrada por la cual se está calculando $\boldsymbol{E}$.

$$\oint \boldsymbol{E} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -(\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{dt}) = -\iint(\partial \boldsymbol{B}/\partial \mathrm{t}) \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{A}. \qquad (31)$$

Dicha ecuación es la cuarta ecuación de Maxwell, en su forma integral. Hay que resaltar que el campo eléctrico inducido forma líneas de campo cerradas, es decir, este campo no es conservativo, a diferencia del que se obtiene en la ley de Gauss.

Para obtener la forma diferencial de esta ecuación hay que utilizar el teorema de Stokes y seguir un procedimiento semejante al que se hizo para obtener la forma diferencial de (20), concluyendo con la ecuación (32) [13].

$$\nabla \mathrm{X}\boldsymbol{E} = -(\partial B/\partial \mathrm{dt}). \qquad (32)$$

La cual muestra que campos magnéticos que varían con respecto al tiempo generan campos eléctricos.

V. Ondas electromagnéticas

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío (medios no cargados ρ=0 y no conductores σ =0) son las ecuaciones (33), (34), (35) y (36), con ε_0 y μ_0 las constantes de permitividad eléctrica y permeabilidad magnética respectivamente, ambas en el vacío.

$$\nabla \bullet \boldsymbol{E} = 0. \qquad (33)$$

$$\nabla \bullet \boldsymbol{B} = 0. \qquad (34)$$

$$\nabla \mathrm{X}\boldsymbol{B} = \mu_0\varepsilon_0(\mathrm{d}\boldsymbol{E}/\mathrm{dt}). \qquad (35)$$

$$\nabla \mathrm{X}\boldsymbol{E} = -(\mathrm{d}B/\mathrm{dt}). \qquad (36)$$

Con ellas se puede llegar a las ecuaciones (37) y (38) [13].

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \mu_0\varepsilon_0(\partial^2\boldsymbol{E}/\partial \mathrm{t}^2) = 0. \qquad (37)$$

$$\nabla^2\boldsymbol{B} - \mu_0\varepsilon_0(\partial^2\boldsymbol{B}/\partial \mathrm{t}^2) = 0. \qquad (38)$$

Lo que demuestra que los campos electromagnéticos (campos en los que existe tanto campo eléctrico como magnético) se comportan como ondas, de velocidad igual a

$(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$, y esa velocidad es igual a la velocidad de la luz en el vacío, por lo que se pudo empezar a pensar que la luz era una onda electromagnética, y de hecho así es; la luz es una onda electromagnética.

VI. Conclusiones

Las ecuaciones de Maxwell son unas de las más grandes aportaciones de Maxwell, relacionan a los campos eléctricos con los magnéticos, que antes se concebían como fenómenos distintos entre sí. Y no solo se consiguió eso, las ecuaciones de Maxwell también describen todos los fenómenos electromagnéticos con tan solo cuatro ecuaciones, tan sencillas que científicos como Boltzmann llegaron a preguntar "¿Fue un dios quien escribió estas líneas…?" [1], y además esas ecuaciones permiten describir el comportamiento de la luz, por lo que también se dice "Dios dijo: hágase la luz, y las ecuaciones de Maxwell fueron creadas".

VII. Agradecimientos

Este trabajo está patrocinado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP-20210119

Referencias

[1] A. Beléndez, La unificación de la luz, electricidad y magnetismo: la "síntesis electromagnética" de Maxwell. Revista Brasileira de Encino de física,vol. 30, no. 2 pp 1-20, 2008.
[2] Available: http://clerkmaxwellfoundation.org/html/about_maxwell.html
[3] L. Campbell, W. Garnett, The life of James Clerk Maxwell with a selecction from his correspondence and occasional writings and a sketch of his contributions to science. Macmillan and Co., London, 1882, pp. 283-334
[4] Real Academia Española, Diccionario de la lengua española (edición del tricentenario), 23.ª ed. Ed. Espasa, Barcelona, 2014 pp 1703-1706
[5] Available: https://calculo21.com/campos-vectoriales/
[6] Available: https://steemit.com/spanish/@joseg/campo-gravitatorio-parte-ii
[7] D. Halliday, R. Resnick, K. S. Krane, Física, volumen 2 (Versión ampliada), 3ª ed. Ed. Patria, Ciudad de México, 1994, pp. 15-16–41-43–105-107–159-161–195-197–212-213–298-301.
[8] Available: https://concepto.de/campo-electrico/
[9] Available: https://www.caracteristicas.co/campo-magnetico/
[10] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, D. Spellman, Analisis vectorial, 2ª ed. Ed. Mc Graw Hill, Ciudad de México, 2009 pp 126-127
[11] H. P. Hsu, Análisis vectorial. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1987 pp 59–96
[12] Available: http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/1ercuat2012/ecuaciones_diferenciales/rot_grad_div.pdf
[13] E. Hecht, Optics, 4ª ed. Ed. Addison Wesley, San Francisco, 2002 pp 39-43–649-651
[14] Available: https://www.freepng.es/png-niu3eh/
[15] Available: https://docplayer.es/115203883-5-el-campo-magnetico-frente-a-la-electricidad.html