La derivada fraccional de Riemann-Liuoville

Rocha-Martínez, J.M.[1], Acosta Abreu, R.S.[2]
[1]Departamento de Matemáticas, ESFM-IPN, México D.F., México
[2]Departamento de Matemáticas, ESFM-IPN, México D. F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: jrocham@ipn.mx, racosta@ipn.mx

Resumen — **En este trabajo se introduce la derivada fraccional Riemann y Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}$. Se calcula la derivada fraccional de algunas funciones clásicas y se demuestran varias propiedades generales de este concepto, entre otras, condiciones suficientes para la existencia de una derivada fraccional, interacciones entre la derivada fraccional y la integral fraccional y algunas propiedades de asociatividad.**

Palabras Clave – **Derivada fraccional, integral fraccional, cálculo fraccional.**

Abstract — **In this work the fractional derivative of Riemann and Liouville of order $\alpha \in \mathbb{R}$ is introduced. The fractional derivative of some classical functions is calculated and several general properties of this concept are proved, among others, sufficient conditions for the existence of a fractional derivative, interactions between the fractional derivative and the fractional integral and some associative properties.**

Keywords — **Fractional derivative, fractional integral, fractional calculus.**

I. INTRODUCCIÓN

La integral fraccional de Riemann-Liouville (abreviado RL) de orden $\alpha \in \mathbb{R}$ de una función medible $f:[a,b] \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ denotará indistintamente al campo $\mathbb{R}$ o X y $\mathbb{N}^+$ al conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$) con $a < b$ en $\mathbb{R}$, se define como

$$I_{a^+}^{\alpha}[f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt$$

para toda $x \in [a,b]$ tal que la integral exista, donde $\Gamma(z)$ es una extensión analítica de la función gama

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \forall x \in]0,\infty[,$$

al conjunto X $\setminus \mathbb{N}^+$. Se recuerda que esta definición generaliza a la fórmula de Cauchy para la $n-$ésima integral iterada dada por

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}}\, dt, \quad \forall x \ge a.$$

En [1] y [2] se analizan varias propiedades generales de la integral fraccional y se calcula la integral fraccional de algunas funciones específicas. Todo este material será usado sin mayor advertencia a lo largo del presente trabajo.

[1,2]Becarios de COFAA y EDD del IPN.

Tal como se aprecia en el penúltimo párrafo, se puede decir que la integral fraccional es una generalización natural de la $n-$ésima integral reiterada; sin embargo, no hay una analogía similar con la derivada fraccional. El concepto de derivada fraccional se basa esencialmente en los conceptos de integral fraccional y de derivada usual. Por otra parte, a pesar de que la integral y la derivada fraccional se originaron desde hace varios siglos, en la actualidad aún no se cuenta con interpretaciones plausibles acerca de su significado. Respecto a su potencial utilidad, no fue sino hasta finales del siglo pasado que se comenzaron a estudiar diversas aplicaciones prácticas de ambos conceptos.

En este trabajo se introduce pues el concepto de derivada fraccional de RL de orden $\alpha \in \mathbb{R}$, se calcula la derivada fraccional de algunas funciones específicas y se demuestran varias propiedades generales de este concepto, entre otras, condiciones suficientes de para la existencia de una derivada fraccional, interacciones entre la derivada fraccional y la integral fraccional y propiedades de asociatividad.

II. RESULTADOS BÁSICOS

La definición de derivada fraccional de orden α se hará distinguiendo los casos $\alpha \in [0,1[$, $\alpha > 0$ arbitrario y $\alpha < 0$.

Derivada fraccional de orden $\alpha \in [0,1[$.

1. Definición. *Si $f:[a,b] \to \mathbb{K}$ es una función medible y $\alpha \in]0,1[$, se define*

$$(1) \qquad D_{a^+}^{\alpha}[f](x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{du} \int_a^u \frac{f(t)}{(u-t)^{\alpha}}\, dt \right)\Bigg|_{u=x}$$

*para toda $x \in [a,b]$ donde la derivada de la derecha exista. La función $D_{a^+}^{\alpha}[f](x)$ se llama la **derivada fraccional de Riemann-Liouville de f en x de orden** α.*

Para $\alpha = 0$ (igual que sucede con la derivada usual), se tiene $D_{a^+}^{0}[f](x) = f(x), \forall x \in [a,b]$.

La conexión entre la integral fraccional y la derivada fraccional de RL puede establecerse por medio de la resolución de la ecuación integral de Abel de primera especie.

2. Proposición. *Sea $f:[a,b] \to \mathbb{K}$ una función y $\alpha \in]0,1[$. Si f se puede escribir como la integral fraccional de orden α de alguna función $\phi:[a,b] \to \mathbb{K}$ integrable, es decir,*

$$f(x) = I_{a^+}^{\alpha}[\phi](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt, \forall x \in [a,b],$$

entonces ϕ debe ser la derivada fraccional de f de orden α, *es decir,*

$$\phi(x)=D_{a^+}^{\alpha}[f](x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{d}{ds}\int_a^s\frac{f(t)}{(s-t)^{\alpha}}dt\right)\Bigg|_{s=x}$$

c.t.p. en $[a,b]$.

Demostración. Se desea determinar $\phi:[a,b]\to\mathbb{K}$ tal que cumpla con la ecuación

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\phi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\,. \tag{2}$$

Multiplique esta última ecuación por $\Gamma(\alpha)/(s-x)^{\alpha}$, donde s varía en $[a,b]$, e integre respecto a x de a hasta s. Resulta,

$$\Gamma(\alpha)\int_a^s\frac{f(x)}{(s-x)^{\alpha}}dx=\int_a^s\frac{dx}{(s-x)^{\alpha}}\int_a^x\frac{\phi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Por el teorema de Fubini se puede intercambiar el orden de integración en la integral reiterada de la derecha, se obtiene

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\int_a^s\frac{f(x)}{(s-x)^{\alpha}}dx&\\&=\int_a^s\phi(t)dt\int_t^s\frac{dx}{(s-x)^{\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}\end{aligned} \tag{3}$$

Ahora, en la última integral de la derecha se hace el cambio de variable $x(u)=t+u(s-t)$. Queda entonces

$$\begin{aligned}\int_t^s&\frac{dx}{(s-x)^{\alpha}(x-t)^{1-\alpha}}\\&=\int_0^1\frac{s-t}{\big(s-t-u(s-t)\big)^{\alpha}(t+u(s-t)-t)^{1-\alpha}}du\\&=\int_0^1\frac{s-t}{(s-t)^{\alpha}(1-u)^{\alpha}u^{1-\alpha}(s-t)^{1-\alpha}}du\\&=\int_0^1(1-u)^{-\alpha}u^{\alpha-1}du<+\infty\end{aligned}$$

siempre que $\alpha\in]0,1[$. Ya que

$$\int_0^1(1-u)^{-\alpha}\,u^{\alpha-1}du=B(1-\alpha,\alpha)=\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha),$$

sustituyendo en (3), resulta

$$\Gamma(\alpha)\int_a^s\frac{f(x)}{(s-x)^{\alpha}}dx=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int_a^s\phi(t)dt,$$

de donde,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^s\frac{f(x)}{(s-x)^{\alpha}}dx=\int_a^s\phi(t)dt.$$

Derivando respecto a la variable s se obtendrá

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{ds}\int_a^s\frac{f(x)}{(s-x)^{\alpha}}dx=\phi(s), \tag{4}$$

c.t.p. en $[a,b]$. ■

El resultado anterior dice que si (2) tiene solución (en términos de una integral fraccional), entonces su solución deberá estar dada en términos de (4) (en términos de una derivada fraccional).

3. Observación. Ya que

$$u\mapsto\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^u\frac{f(t)}{(u-t)^{\alpha}}dt=I_{a^+}^{1-\alpha}[f](u),$$

por comodidad o conveniencia se trabajará empleando la identidad

$$D_{a^+}^{\alpha}[f](x)=\left(\frac{d}{du}I_{a^+}^{1-\alpha}[f](u)\right)\Bigg|_{u=x}.\ \blacklozenge \tag{5}$$

Algunas condiciones suficientes para la existencia de la derivada fraccional de una función son las siguientes.

4. Proposición. *Si* $\alpha\in]0,1[$ *y* $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ *es una función absolutamente continua, entonces* $D_{a^+}^{\alpha}[f]$ *está definida c.t.p. en* $[a,b]$.

Demostración. Como f es absolutamente continua, entonces

$$f(x)=\int_a^x f'(t)dt+f(a)=I_{a^+}^{1}[f'](x)+f(a),$$

donde $f'\in L_1([a,b],\mathbb{K})$. Ahora empleando la observación 3 y la linealidad del operador $I_{a^+}^{\alpha}$, se tiene

$$\begin{aligned}D_{a^+}^{\alpha}[f](x)&=\left(\frac{d}{du}I_{a^+}^{1-\alpha}[f](u)\right)\Bigg|_{u=x}\\&=\left(\frac{d}{du}I_{a^+}^{1-\alpha}\big[I_{a^+}^{1}[f']+f(a)\big](u)\right)\Bigg|_{u=x}\\&=\left(\frac{d}{du}\left(I_{a^+}^{1-\alpha}\left[I_{a^+}^{1}[f']\right](u)+I_{a^+}^{1-\alpha}[f(a)](u)\right)\right)\Bigg|_{u=x}.\end{aligned}$$

Ahora, por la conmutatividad del operador $I_{a^+}^{\alpha}$ para $\alpha>0$ y puesto que la función $t\mapsto I_{a^+}^{1-\alpha}[f'](t)$ es integrable, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}I_{a^+}^{1-\alpha}\left[I_{a^+}^{1}[f']\right](u)&=\frac{d}{du}I_{a^+}^{1}\left[I_{a^+}^{1-\alpha}[f']\right](u)\\&=I_{a^+}^{1-\alpha}[f'](u)\ \text{ c.t.p. en }[a,b].\end{aligned} \tag{6}$$

donde la última igualdad se sigue de las propiedades de la integral fraccional. Y, por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}I_{a^+}^{1-\alpha}[f(a)](u)&=\frac{d}{du}\left(\frac{f(a)(u-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)\\&=\frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(u-a)^{\alpha}},\qquad\forall\,u\in]a,b].\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de las propiedades de la función Gamma. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}D_{a^+}^{\alpha}[f](x)&=I_{a^+}^{1-\alpha}[f'](x)\\&+\frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}\quad\text{c.t.p. en }[a,b].\ \blacksquare\end{aligned}$$

Una consecuencia del resultado anterior es el siguiente.

5. Corolario. *Si* $\alpha\in]0,1[$ *y* $f\in C^1([a,b],\mathbb{K})$, *entonces* $D_{a^+}^{\alpha}[f](x)$ *existe para toda* $x\in]a,b]$ *y es continua en* $]a,b]$. *Además, si* $f(a)=0$, *entonces* $D_{a^+}^{\alpha}[f]$ *es continua en* $[a,b]$.

Demostración. Dado que f es de clase C^1 en $[a,b]$, la identidad (6) se cumple en todas partes de $[a,b]$, no solo en casi todas partes, por ser f' continua en $[a,b]$. Luego, $I_{a^+}^{1-\alpha}[f']$ también debe ser continua en dicho intervalo (por propiedades de la integral fraccional). Como la función

$$x\mapsto\frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}$$

es continua en $]a,b]$, se concluye que $D^{\alpha}_{a^+}[f](x)$ existe y es continua en todo punto de $]a,b]$ y

$$D^{\alpha}_{a^+}[f](x) = I^{1-\alpha}_{a^+}[f'](x) + \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}}, \forall x \in]a,b].$$

Claramente, si $f(a)=0$, entonces $D^{\alpha}_{a^+}[f](x)$ deberá ser continua en $[a,b]$. ■

6. Corolario. *Sea $\alpha \in]0,1[$. La aplicación*

$$D^{\alpha}_{a^+}[f] : C^1([a,b],\mathbb{K}) \to C(]a,b],\mathbb{K})$$

es lineal sobre el campo $\mathbb{K}$, es decir,

$$D^{\alpha}_{a^+}[cf+g] = cD^{\alpha}_{a^+}[f] + D^{\alpha}_{a^+}[g], \quad \forall f,g \in C^1([a,b],\mathbb{K}) \text{ y } \forall c \in \mathbb{K}.$$

Derivada fraccional de orden $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. Notación. Si $\alpha > 0$, se definen $[\alpha]$ como la **parte entera** de α y $\{\alpha\}$ como la **parte fraccional** de α, es decir, $[\alpha] \in \mathbb{N}^+$ y $\{\alpha\} \in [0,1[$ son tales que $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$. ♦

8. Definición. *Sea $f \in C([a,b],\mathbb{K})$.*

Si $\alpha > 0$, se define

(7) $$D^{\alpha}_{a^+}[f](x) = \frac{d^{[\alpha]}}{du^{[\alpha]}}\left(D^{\{\alpha\}}_{a^+}[f](u)\right)\Bigg|_{u=x},$$

para toda $x \in [a,b]$ tal que la derivada de la derecha exista, donde $D^{\{\alpha\}}_{a^+}[f]$ se define como en (1).

Si $\alpha < 0$, se define

(8) $$D^{\alpha}_{a^+}[f](x) = I^{-\alpha}_{a^+}[f](x),$$

para toda $x \in [a,b]$ tal que la integral de la derecha exista.

Finalmente, si $\alpha = 0$, se define

$$D^{0}_{a^+}[f] = f.$$

$D^{\alpha}_{a^+}[f]$ se llama la ***derivada fraccional de RL de orden α, $\alpha \in \mathbb{R}$.***

9. Observación. La derivada fraccional de orden α, para $\alpha > 0$, se obtiene al derivar $([\alpha]+1)$ −veces la función

$$u \mapsto I^{1-\{\alpha\}}_{a^+}[f](u).$$

En efecto, en vista de la Observación 3, tenemos

(9) $$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}[f](x) &= \left(\frac{d^{[\alpha]}}{du^{[\alpha]}} D^{\{\alpha\}}_{a^+}[f](u)\right)\Bigg|_{u=x} \\ &= \left(\frac{d^{[\alpha]}}{du^{[\alpha]}}\left(\frac{d}{du} I^{1-\{\alpha\}}_{a^+}[f](u)\right)\right)\Bigg|_{u=x} \\ &= \left(\frac{d^{[\alpha]+1}}{du^{[\alpha]+1}} I^{1-\{\alpha\}}_{a^+}[f](u)\right)\Bigg|_{u=x}. \end{aligned}$$

La identidad (9) generaliza a la identidad (5) de la observación 3 y será usada frecuentemente. ♦

Se tiene el resultado siguiente sobre la existencia de la derivada fraccional.

10. Proposición. *Si $\alpha > 0$, con $\alpha \notin \mathbb{N}$, y $f \in C^{[\alpha]+1}([a,b],\mathbb{K})$, entonces $D^{\alpha}_{a^+}[f](x)$ existe para cada $x \in]a,b]$.*

Demostración. Como $f \in C^{[\alpha]+1}([a,b],\mathbb{K})$, por el teorema de Taylor, se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \cdots + \frac{f^{([\alpha])}(a)}{[\alpha]!}(t-a)^{[\alpha]} \\ &\quad + \frac{1}{[\alpha]!}\int_a^t \frac{f^{([\alpha]+1)}(s)}{(t-s)^{-[\alpha]}} ds \\ &= \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k + I^{[\alpha]+1}_{a^+}\left[f^{([\alpha]+1)}\right](t). \end{aligned}$$

Se sigue pues de la observación 9,

(10) $$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}[f](x) &= \frac{d^{[\alpha]+1}}{du^{[\alpha]+1}}\left(I^{1-\{\alpha\}}_{a^+}\left[\sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + I^{[\alpha]+1}_{a^+}\left[f^{([\alpha]+1)}\right](t)\right](u)\right)\Bigg|_{u=x}. \end{aligned}$$

Por propiedades de la integral fraccional, para cada $k \in \{0,1,\dots,[\alpha]\}$, se tiene

(11) $$\begin{aligned} I^{1-\{\alpha\}}_{a^+}&\left[\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k\right](u) \\ &= \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+2-\{\alpha\})}(u-a)^{1-\{\alpha\}+k}, \ \forall u \in]a,b]. \end{aligned}$$

Además, por la propiedad asociativa del operador $I^{\alpha}_{a^+}$, para $\alpha > 0$,

(12) $$\begin{aligned} I^{1-\{\alpha\}}_{a^+}&\left[I^{[\alpha]+1}_{a^+}\left[f^{([\alpha]+1)}\right](t)\right](u) \\ &= I^{2+[\alpha]-\{\alpha\}}_{a^+}\left[f^{([\alpha]+1)}\right](u), \ \forall u \in [a,b]. \end{aligned}$$

Observe que la función $u \mapsto (u-a)^{1-\{\alpha\}+k}$ es de clase C^{∞} en $]a,b]$, para $k = 0,\dots,[\alpha]$, en particular, de clase $C^{[\alpha]+1}$, y se sabe de la integral fraccional que la función $u \mapsto I^{2+[\alpha]-\{\alpha\}}_{a^+}\left[f^{([\alpha]+1)}\right](u)$ es de clase $C^{[\alpha]+1}$, en $[a,b]$. Por lo tanto, $D^{\alpha}_{a^+}[f](x)$ existe para cada $x \in]a,b]$. ■

11. Corolario. *Si $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, y $f \in C^{[\alpha]+1}([a,b],\mathbb{K})$, entonces $D^{\alpha}_{a^+}[f] \in C(]a,b],\mathbb{K})$. Luego, el operador*

$$D^{\alpha}_{a^+} : C^{[\alpha]+1}([a,b],\mathbb{K}) \to C(]a,b],\mathbb{K})$$

es lineal sobre el campo $\mathbb{K}$.

Demostración. Como la función

$$u \mapsto I^{2+[\alpha]-\{\alpha\}}_{a^+}\left[f^{([\alpha]+1)}\right](u)$$

es de clase $C^{[\alpha]+1}$ en $[a,b]$ y la función

$$u \mapsto (u-a)^{1-\{\alpha\}+k}$$

es de clase C^{∞} en $]a,b]$, se tiene que la función dada por la fórmula (10) es continua en $]a,b]$, luego $D^{\alpha}_{a^+}[f]$ es continua en $]a,b]$. Por lo tanto, el operador

$$\mathrm{D}^{\alpha}_{a^+} : C^{[\alpha]+1}([a,b],\mathbb{K}) \to C(]a,b],\mathbb{K})$$

está bien definido. Por último, la linealidad del operador es consecuencia de la linealidad de dicho operador para cuando $0 < \alpha < 1$ (Corolario 6) y de la linealidad del operador derivada. ■

III. EJEMPLOS

Se usarán algunas fórmulas ya conocidas de integrales fraccionales así como la siguiente propiedad de la ampliación de la función gama al conjunto $X \setminus \mathbb{N}^+$: si $\alpha > 0, \lambda \geq 0$ y $a \in R$, entonces

$$\frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}}\left(\frac{(x-a)^{\lambda+1-\{\alpha\}}}{\Gamma(\lambda+2-\{\alpha\})}\right) = \frac{(x-a)^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(\lambda+1-\alpha)},\ \ x > a. \tag{13}$$

12. Ejemplo. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $c \in \mathbb{K}$. Defina $f: [a, b] \to \mathbb{K}$ como la función constante

$$f(x) = c,\ \ \forall x \in [a, b]$$

Sea $\alpha > 0$. En base a la definición 8 y a la observación 9, se tiene

$$D_{a^+}^{\alpha}[f](x) = \frac{d^{[\alpha]+1}}{du^{[\alpha]+1}} I_{a^+}^{1-\{\alpha\}}[f](u)\bigg|_{u=x}.$$

Se sabe de la integral fraccional que

$$I_{a^+}^{1-\{\alpha\}}[f](u) = c\,\frac{(u-a)^{1-\{\alpha\}}}{\Gamma(2-\{\alpha\})},\ \ \forall u \in [a, b],$$

y usando (13), con $\lambda = 0$ cuando $x \neq a$, se llega a

$$D_{a^+}^{\alpha}[c](x) = \frac{c(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},\ \ \forall x \in]a, b]. \blacklozenge$$

En los siguientes ejemplos se consideran series de funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^{n+\alpha},$$

con $\alpha > 0$. Denote por $R \in]0, +\infty]$ el radio de convergencia de tal serie. Es claro que $f(x)$ es derivable y que su derivada se puede obtener derivando término por término, resulta

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n (x-a)^{n+\alpha-1},\ \ \forall x \in]a, a+R[.$$

donde esta serie tiene el mismo radio de convergencia que la de la función exceptuando el punto a. De hecho, se tiene

$$f^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n+\alpha},\ \ \forall x \in]a, a+R[.$$

13. Ejemplo. Sean $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$, y $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^+$. Defina $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = x^{\beta},\ \ \forall x \in [a, b].$$

Se sabe de la integral fraccional que, para $\alpha > 0$,

$$I_{a^+}^{1-\{\alpha\}}[f](u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{\beta-n} \frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(2+n-\{\alpha\})}(u-a)^{n+1-\{\alpha\}},$$

Observe que por (13), con $\lambda = n$, se tiene que

$$\frac{d^{[\alpha]+1}}{du^{[\alpha]+1}}\left[\frac{(u-a)^{n+1-\{\alpha\}}}{\Gamma(2+n-\{\alpha\})}\right] = \frac{(u-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}.$$

Derivando término a término se llega a que

$$D_{a^+}^{\alpha}\left[t^{\beta}\right](x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{\beta-n} \frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(n+1-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha},\ \ \forall x \in]a, 2a[.$$

Ahora fije $n \in N$ y defina $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ como

$$g(x) = x^n,\ \ \forall x \in [a, b].$$

Se sabe de la integral fraccional que, para $\alpha > 0$,

$$I_{a^+}^{1-\{\alpha\}}[g](u) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{(u-a)^{k+1-\{\alpha\}}}{\Gamma(k+2-\{\alpha\})},\ \ \forall u \in [a, b].$$

Puesto que

$$\frac{d^{[\alpha]+1}}{du^{[\alpha]+1}}\frac{(u-a)^{k+1-\{\alpha\}}}{\Gamma(k+2-\{\alpha\})} = \frac{(u-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}$$

(vea (13)), resulta

$$D_{a^+}^{\alpha}\ [t^n](x) = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)},\ \ \forall x \in]a, b].$$

Por último, considere el caso $a = 0$. Sea $h: [0, b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$h(x) = x^{\beta},\ \ \forall x \in [0, b],$$

donde $\beta > -1$. Se sabe de la integral fraccional que, para $\alpha > 0$,

$$I_{0^+}^{1-\{\alpha\}}[h](u) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2+\beta-\{\alpha\})} u^{1+\beta-\{\alpha\}},\ \ \forall u \in [0, b].$$

Ahora usando (13) se obtiene

$$D_{0^+}^{\alpha}\left[t^{\beta}\right](x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha},\ \ \forall x \in]0, b].$$

En particular, para $\beta = 1$ y $\alpha = 1/2$, se tiene

$$D_{0^+}^{1/2}[t](x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1-1/2} D_{0^+}^{1/2}[t](x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}/2} x^{1/2} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}},\ \ \forall x \in [0, b],$$

(lo que coincide con lo obtenido por Lacroix en 1819 y por Leibniz en 1697). ♦

14. Ejemplo. Sean $a, b, \beta \in \mathbb{R}, a < b$ y $\beta \neq 0$. Sean $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \operatorname{sen}(\beta x) \quad \text{y} \quad g(x) = \cos(\beta x), \forall x \in [a, b].$$

Se sabe de la integral fraccional que, para $\alpha > 0$,

$$I_{a^+}^{1-\{\alpha\}}[f](u) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{\operatorname{sen}^{(n)}(\beta a)}{\Gamma(n+2-\{\alpha\})}(u-a)^{n+1-\{\alpha\}},\ \ \forall u \geq a,$$

$$I_{a^+}^{1-\{\alpha\}}[g](u) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{\cos^{(n)}(\beta a)}{\Gamma(n+2-\{\alpha\})}(u-a)^{n+1-\{\alpha\}},\ \ \forall u \geq a.$$

Derivando término a término, se obtienen

$$D_{a^+}^{\alpha}[\operatorname{sen}(\beta t)](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{\operatorname{sen}^{(n)}(\beta a)}{\Gamma(n+1-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha}, \quad \forall x > a,$$

$$D_{a^+}^{\alpha}[\cos(\beta t)](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{\cos^{(n)}(\beta a)}{\Gamma(n+1-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha}, \forall x > a. \blacklozenge$$

15. Ejemplo. Las derivadas fraccionales de orden $\alpha > 0$ para las funciones exponencial y logaritmo se obtienen de manera análoga al anterior ejemplo y son las siguientes

$$D_{a^+}^{\alpha}[e^{\beta t}](x) = e^{\beta a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\Gamma(n+1-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha}, \quad \forall x > a, \quad \beta \in \mathbb{K},$$

$$D_{a^+}^{\alpha}[\log(t)](x) = \frac{\log(a)\,(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{a^n \Gamma(n+1-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha}, \quad \forall x \in]a, a+1[. \blacklozenge$$

IV. Resultados adicionales

El resultado siguiente dice que la derivación fraccional de orden $\alpha > 0$ es la operación inversa de la integración fraccional de orden α, es decir, se trata de una versión fraccional del primer teorema fundamental del cálculo.

16. Teorema. *Si* $f \in L_1([a,b],\mathbb{K})$, *entonces*

$$D_{a^+}^{\alpha}\left[I_{a^+}^{\alpha}[f]\right](x) = f(x) \quad c.t.p.\ en\ [a,b], \quad \forall \alpha > 0.$$

Demostración. Aplicando reiteradamente el primer teorema fundamental del cálculo a la fórmula de la n −ésima integral reiterada de Cauchy (vea la sección I) se prueba que la identidad propuesta es válida para $\alpha \in \mathbb{N}^+$. Escriba $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$. Se sabe de las propiedades de la integral fraccional que

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\alpha}\left[I_{a^+}^{\alpha}[f]\right](x) &= \left(\frac{d^{[\alpha]+1}}{du^{[\alpha]+1}} I_{a^+}^{1-\{\alpha\}}\left[I_{a^+}^{[\alpha]+\{\alpha\}}[f]\right](u)\right)\Bigg|_{u=x} \\ &= \left(\frac{d^{[\alpha]+1}}{du^{[\alpha]+1}} I_{a^+}^{1+[\alpha]}[f](u)\right)\Bigg|_{u=x} \\ &= f(x) \quad \text{c.t.p. en } [a,b]. \blacksquare \end{aligned}$$

17. Corolario. *El operador lineal sobre el campo* $\mathbb{K}$

$$I_{a^+}^{\alpha}: L_p([a,b],\mathbb{K}) \longrightarrow L_p([a,b],\mathbb{K}), \quad p \in [1,+\infty],$$

es inyectivo, para $\alpha > 0$.

Demostración. Bastará probar que si $f \in L_p([a,b],\mathbb{K})$ satisface $I_{a^+}^{\alpha}[f] = 0$, entonces $f = 0$ c.t.p. en $[a,b]$. En efecto, se tiene

$$D_{a^+}^{\alpha}\left[I_{a^+}^{\alpha}[f]\right] = D_{a^+}^{\alpha}[0] = 0.$$

La proposición anterior implica que $f = 0$ c.t.p. en $[a,b]$. $\blacksquare$

18. Proposición. *Sean* $\alpha, \beta > 0$. *Si* $f \in C^{[\alpha+\beta]+1}([a,b],\mathbb{K})$ *satisface la condición* $f^{(k)}(a) = 0, k = 0,1,\dots,[\alpha+\beta]$, *entonces existe* $D_{a^+}^{\alpha}\left[D_{a^+}^{\beta}[f]\right](x)$, *para cada* $x \in [a,b]$, *y se cumple*

$$D_{a^+}^{\alpha}\left[D_{a^+}^{\beta}[f]\right](x) = D_{a^+}^{\alpha+\beta}[f](x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Demostración. Como $f \in C^{[\alpha+\beta]+1}([a,b],\mathbb{K})$, por el teorema de Taylor, se tiene

$$f(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha+\beta]} \frac{f^k(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k + I_{a^+}^{[\alpha+\beta]+1}\left[f^{([\alpha+\beta]+1)}\right](x), \quad \forall x \in [a,b].$$

Luego si $f^{(k)}(a) = 0, k = 0,1,\dots,[\alpha+\beta]$, entonces $f(x) = I_{a^+}^{[\alpha+\beta]+1}\left[f^{([\alpha+\beta]+1)}\right](x)$, así pues,

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\beta}[f](x) &= D_{a^+}^{\beta}\left[I_{a^+}^{[\alpha+\beta]+1}\left[f^{([\alpha+\beta]+1)}\right]\right](x) \\ &= D_{a^+}^{\beta}\left(I_{a^+}^{\beta}\left[I_{a^+}^{[\alpha+\beta]+1-\beta}\left[f^{([\alpha+\beta]+1)}\right]\right]\right)(x) \\ &= I_{a^+}^{[\alpha+\beta]+1-\beta}\left[f^{([\alpha+\beta]+1)}\right](x) \end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple por propiedades de la integral fraccional y el teorema 16. Aplicando $D_{a^+}^{\alpha}$ a la expresión anterior se obtiene

$$D_{a^+}^{\alpha}\left[D_{a^+}^{\beta}[f]\right](x) = I_{a^+}^{[\alpha+\beta]+1-(\beta+\alpha)}\left[f^{([\alpha+\beta]+1)}\right](x),$$

donde el lado derecho existe, para toda $x \in [a,b]$, pues $[\alpha+\beta]+1-(\beta+\alpha) > 0$ y $f^{([\alpha+\beta]+1)} \in C([a,b],\mathbb{K})$. Además, por el segundo teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$\mathrm{I}_{a^+}^{[\alpha+\beta]+1-(\beta+\alpha)}\left[f^{([\alpha+\beta]+1)}\right](x) = D_{a^+}^{\alpha+\beta}\left[I_{a^+}^{[\alpha+\beta]+1}\left[f^{([\alpha+\beta]+1)}\right]\right](x) = D_{a^+}^{\alpha+\beta}[f](x)$$

pues $f \in C^{[\alpha+\beta]+1}([a,b],\mathbb{K})$. $\blacksquare$

19. Proposición. *Sea* $\alpha > 0$. *Si* $f \in C^{[\alpha]+1}([a,b],\mathbb{K})$ *y* $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 0,1,\dots,[\alpha]$, *entonces*

$$(14) \qquad I_{a^+}^{\alpha}\left[D_{a^+}^{\alpha}[f]\right] = f.$$

(o sea, bajo condiciones de continuidad, la integración fraccional de orden α *es la operación inversa de la derivación fraccional de orden* α, *es decir, se trata de una versión fraccional del segundo teorema fundamental del cálculo clásico).*

Demostración. Usando el teorema de Taylor en su forma integral y dado que $f^{(k)}(a) = 0, k = 0,1,\dots,[\alpha]$, se tiene que

$$f(x) = I_{a^+}^{[\alpha]+1}\left[f^{([\alpha]+1)}\right](x), \forall x \in [a,b].$$

Aplicando el operador $D_{a^+}^{\alpha}$ a la igualdad anterior, se obtiene

$$D_{a^+}^{\alpha}[f](x) = D_{a^+}^{\alpha}\left[I_{a^+}^{[\alpha]+1}\left[f^{([\alpha]+1)}\right]\right](x) = I_{a^+}^{[\alpha]+1-\alpha}\left[f^{([\alpha]+1)}\right](x).$$

Aplicando ahora el operador $I_{a^+}^{\alpha}$ a la expresión anterior, resulta

$$I_{a^+}^{\alpha}\left[D_{a^+}^{\alpha}[f]\right](x) = I_{a^+}^{[\alpha]+1}\left[f^{([\alpha]+1)}\right](x) = f(x),$$

donde la última igualdad se cumple por el segundo teorema fundamental del cálculo, pues $f \in C^{[\alpha]+1}([a,b],\mathbb{K})$. $\blacksquare$

20. Observación. Se analizará el siguiente caso peculiar de la función constante $f(x)=c, c\in\mathbb{K}$, definida sobre un intervalo $[a,b]$.

Si $0<\alpha<1$, entonces

$$D_{a^+}^{\alpha}[f](s)=\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)(s-a)^{\alpha}},\quad \forall s\in]a,b].$$

Por otro lado, se sabe de la integral fraccional que

$$I_{a^+}^{\alpha}\left[\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^{\alpha}}\right](x)=c,\quad \forall x\in]a,b],$$

es decir,

$$I_{a^+}^{\alpha}\left[D_{a^+}^{\alpha}[c]\right](x)=c,\quad \forall x\in]a,b].$$

Ahora, si se toma una función $g\in C^1([a,b],\mathbb{K})$, entonces la función $x\mapsto g(x)-g(a)$, cumple con las hipótesis de la Proposición 19, luego

$$\begin{aligned} g(x)-g(a)&=I_{a^+}^{\alpha}\left[D_{a^+}^{\alpha}[g(t)-g(a)]\right](x)\\ &=I_{a^+}^{\alpha}\left[D_{a^+}^{\alpha}[g]\right](x)-g(a),\quad \forall x\in[a,b],\end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple por la linealidad de los operadores $D_{a^+}^{\alpha}$ y $I_{a^+}^{\alpha}$. Por lo tanto,

$$I_{a^+}^{\alpha}\left[D_{a^+}^{\alpha}[g]\right](x)=g(x),\forall x\in]a,b],$$

como se dijo, con $g\in C^1([a,b],\mathbb{K})$ pero sin necesidad de que $g(a)=0$.

Por otra parte, se puede establecer un resultado similar a la Proposición 18 para funciones de clase C^1 pero sin pedir que la función se anule en a. Primero observe que, por la Proposición 18, se tiene

$$D_{a^+}^{\beta}\left[D_{a^+}^{\alpha}[f]\right](x)=D_{a^+}^{\alpha+\beta}[f](x),\quad \forall x\in[a,b],$$

donde $0<\alpha+\beta<1$ y $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ es una función constante. Considere ahora $h\in C^1([a,b],\mathbb{K})$. Aplicando el truco del último párrafo y la Proposición 18, se concluye fácilmente que

$$D_{a^+}^{\beta}\left[D_{a^+}^{\alpha}[h]\right](x)=D_{a^+}^{\alpha+\beta}[h](x),\quad \forall x\in[a,b].\blacklozenge$$

Respecto al comportamiento de la función $\alpha\mapsto D_{a^+}^{\alpha}$ se puede demostrar, por ejemplo, que si $\alpha>0$ y $f\in C^{[\alpha]+1}([a,b],\mathbb{K})$, entonces

$$\lim_{\beta\to[\alpha]} D_{a^+}^{\beta}[f](x)=D_{a^+}^{[\alpha]}[f](x)=f^{([\alpha])}(x),\quad \forall x\in]a,b],$$

probando en esta forma que, en cierto sentido, el concepto de derivada fraccional generaliza efectivamente al concepto de derivada usual.

V. Conclusiones

El concepto de derivada fraccional de RL de orden $0\leq\alpha<1$ de una función f se ha definido esencialmente como la derivada usual de la integral fraccional de orden $1-\alpha$ de f. Posteriormente esta definición fue extendida a cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$. Se ilustró este concepto mediante diversos ejemplos y se demostraron varias de sus propiedades generales, tales como algunas condiciones suficientes de para la existencia de una derivada fraccional, las interacciones entre la derivada fraccional y la integral fraccional y algunas propiedades de asociatividad. Quedaría pendiente la obtención de algunos resultados importantes relacionados con versiones fraccionales, por ejemplo, del teorema de Taylor y del segundo teorema fundamental del cálculo. Esperamos poder hacer esto posteriormente.

Referencias

[1] R.S. Acosta-Abreu y J.M. Rocha-Martínez (2019), *La integral fraccional de funciones continuas*, Memorias de la Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas , Año 24, Número 24, Ciudad de México.

[2] R.S. Acosta-Abreu y J.M. Rocha-Martínez (2020), *La integral fraccional como convolución*, Memorias de la Reunión Nacional Académica de Física y Matemáticas , Año 25, Número 25, Ciudad de México.

[3] O.A. Biberstein (1976), *Integración de Lebesgue*, Notas de la ESFM del IPN.

[4] J. Munkamar (2004), *Riemann-Liouville Fractional Derivatives and the Taylor-Riemann Series*, U.U.D.M. Project Report 2004:7, Department of Mathematics, Uppsala University.

[5] I. Podlubny (2002), *Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation*, International Journal of Fractional Calculus & Applied Analysis, Vol. 5, No. 4.

[6] H.L. Royden (1968), *Real Analysis*, *2a. Edición*, Macmillan Stanford U.

[7] A. Vargas Rodríguez (2012), *El cálculo fraccional de Riemann y Liouville*, Tesis de Licenciatura, ESFM-IPN, México.