Variación del portafolio óptimo por la técnica de remuestreo

Ramón Sebastián Salat Figols[1]
[1]Departamento de Matemáticas, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: rssalat@ipn.mx

Resumen — **Se obtienen las distribuciones empíricas de los coeficientes y de la varianza mínima simulando portafolios óptimos, generando valores para la distribución multinormal de los rendimientos y por la técnica de remuestreo, bajo los dos supuestos de que siguen y que no siguen una distribución multinormal y se comparan los resultados. Se concluye que la técnica de remuestreo produce resultados confiables.**

Palabras Clave – Portafolio óptimo, remuestreo, simulación de Montecarlo

Abstract — **The empirical distributions of the coefficients and of the minimum variance are obtained by simulating optimal portfolios, generating values for the multinormal distribution of returns and by the resampling technique, under the two assumptions that they follow and do not follow a multinormal distribution and are compared the results. It is concluded that the resampling technique produces reliable results.**

Keywords — **Optimal portfolio, resampling, Montecarlo simulation**

I. INTRODUCCIÓN

Supóngase que se quiere invertir una unidad monetaria en m acciones cuyos rendimientos diarios están dados por las variables aleatorias $R_1, R_2, R_3, \dots, R_m$ con valores esperados $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_m$, desviaciones estándar $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_m$, respectivamente. Y con matriz de covarianzas dada por $\Sigma = (c_{ij})$. Si se invierten $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ en las acciones 1, 2, 3,…,m, respectivamente, entonces:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \tag{1}$$

La ganancia en un día g, está dada por:

$$G = \sum_{i=1}^{m} x_i R_i \tag{2}$$

El valor esperado de la ganancia diaria es:

$$g = E(G) = \sum_{i=1}^{m} x_i \mu_i \tag{3}$$

La varianza de la ganancia diaria está dada por:

$$V(G) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i c_{ij} x_j \tag{4}$$

El tema de encontrar un portafolio óptimo bajo diferentes criterios ha sido ampliamente estudiado [1].

Una opción para minimizar la varianza de la ganancia diaria, es plantear el problema con restricciones de no negatividad de los coeficientes [2], es decir, considerando que no es posible la venta:

$$\begin{gathered} Minimizar\ V(G), sujeto\ a \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, g = g_0\ y \\ x_i \geq 0\ para\ i = 1, 2, 3, \dots, m \end{gathered} \tag{5}$$

Si no se imponen las restricciones de que las cantidades invertidas sean no negativas, entonces el problema puede resolverse por multiplicadores de Lagrange, pero si se impone la mencionada restricción, entonces existe la posibilidad de resolverlo empleando métodos numéricos; esta es la opción que se seguirá en este trabajo.

Para estimar los parámetros $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_m)\ y\ \Sigma$, se usan los estimadores de máxima verosimilitud, suponiendo que los rendimientos siguen una distribución multinormal [3].

Para el caso de tres activos, el problema puede convertirse en un problema de una variable, resolviendo para la variable x_2 y x_3 el sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = g_0 \end{gathered} \tag{6}$$

Se obtiene:

$$x_2 = \frac{\mu_3 - (\mu_3 - \mu_1) x_1 - g_0}{\mu_3 - \mu_2} \text{ y } x_3 = \frac{(\mu_2 - \mu_1) x_1 - u_2 + g_0}{\mu_3 - \mu_2} \tag{7}$$

Siempre que $\mu_3 \neq \mu_2$. Dado que en la práctica μ_1, μ_2 y μ_3 serán diferentes a pares, no hay pérdida de generalidad en suponer que $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$ y en tal caso, para que los tres coeficientes estén en el intervalo $[0, 1]$, se debe cumplir:

[1]Este Becario de EDD del IPN y de SIBE de la COFAA.

$$\frac{\mu_2 - g_0}{\mu_2 - \mu_1} < x_1 < \frac{\mu_3 - g_0}{\mu_3 - \mu_1} \tag{8}$$

Si $g_0 > \mu_3$ o $g_0 < \mu_1$ no habrá solución. Si $\mu_1 < g_0 < \mu_2$, entonces x_1 variará en un subintervalo propio de $[0, 1]$. Es decir, las ecuaciones (7) no siempre darán valores admisibles.

Los resultados obtenidos para los coeficientes y para la varianza mínima dependen de la muestra de rendimientos considerados. Si se toma otra muestra de los rendimientos para las mismas acciones, los resultados cambiarán. Y aún más, es posible que en otra muestra no exista una solución que satisfaga las restricciones propuestas en (5). Por lo tanto, es necesario estudiar a las distribuciones de los coeficientes y de la varianza mínima en el muestreo. En este trabajo, se estudiarán dichas distribuciones por simulación de Montecarlo.

Si se supone que los rendimientos siguen un movimiento Browniano, entonces se pueden simular los rendimientos del modo que se explica a continuación.

Sean $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ m variables aleatorias que siguen una distribución conjunta normal con con medias $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_m$, respectivamente. Y con matriz de covarianza $C = (c_{ij})$. Y sean $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_m$, m variables aleatorias independientes y con distribución normal estándar. Existen una matriz cuadrada de orden m, $A = (a_{ij})$, tal que las variables $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_m$, dadas por:

$$Y_i = \mu_i + \sum_{l=1}^{m} a_{il} Z_l \tag{9}$$

tiene la misma distribución conjunta que las variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$. Esta matriz A es la matriz de Cholesky de la matriz de covarianzas C. Usando estas variables Y_i se pueden simular valores para las variables X_i.

Para el caso en el que no sea posible suponer que los rendimientos sigan un movimiento Browniano, se puede utilizar la técnica de remuestreo. Sin embargo, es necesario que la técnica aplicada respete las correlaciones existentes entre los rendimientos de las acciones consideradas.

La técnica de remuestreo [4], que se propone es la siguiente: Se realiza sobre conjunto de n rendimientos de las m acciones dado por (x_{ij}); para preservar la correlación de las variables en la muestra, se considera el conjunto de índices $(1,2,3, \dots, n)$. A partir de este conjunto, se seleccionan k muestras aleatorias con reemplazo $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$. Se considera una nueva tabla de n filas y n columnas, en la que la fila i-ésima está dada por $(x_{k_i 1}, x_{k_i 2}, x_{k_i 3}, \dots, x_{k_i n})$.

Sobre cada una de estas muestras escogidas con reemplazo, se resuelve el problema planteado por (5), obteniendo los valores de los coeficientes y de la varianza mínima.

En un esfuerzo por validar la técnica propuesta de remuestreo, se considera una muestra de rendimientos que sigan un movimiento Browniano y se obtienen las distribuciones de los coeficientes y de la varianza mínima por ambos métodos, esto es, por el método de la matriz de Cholesky, y por la técnica propuesta de remuestreo. Los resultados deben ser muy similares; en caso contrario, la técnica propuesta de remuestreo no sería confiable.

II. Metodología

Para encontrar el portafolio óptimo, se utlizaron dos técnicas diferentes. Una, reduciendo el problema de tres variables a una variable, por medio de la ecuación (8). La otra, ulizando la función *minimize* de la librería *scipy* con el método de SLSQP usando restricciones y acotamiento [5]. Los dos métodos producen los mismos resultados, pero el de reducción a una variable es más eficiente. Sin embargo, para el caso en el que en lugar de considerar 3 acciones se consideraron 12, solamente puedo usarse SLSQP.

Los dos métodos que se explican a continuación, se usaron en dos casos distintos: En el primer caso, se parte de una muestra grande, de 100,000 rendimientos para tres acciones con los parámetros de tres acciones específicas, generada como una multinormal, en el segundo caso, se parte de una muestra de datos reales para las tres acciones de 570 elementos. En el primer caso, se parte de una muestra generada como una multinormal, por lo tanto, se supone la normalidad de los rendimientos. En el segundo, por el contrario, no se asume esta hipótesis y se trabaja sobre datos reales.

A. Suponiendo que los rendimientos siguen un movimiento Browniano.

Se consideraron los rendimientos de tres acciones cuyas medias fueron:

$$\mu_1 = 0.00011407, \mu_2 = 0.00015925 \ y \ \mu_3 = 0.00036581$$

Y con matriz de covarianzas:

$$C = \begin{pmatrix} 0.00092849 & 0.00096595 & 0.00108275 \\ 0.00096595 & 0.00315704 & 0.00338523 \\ 0.00108275 & 0.00338523 & 0.00466727 \end{pmatrix}$$

El valor de g_0 se tomó como 0.0002130.

Primero, empleando la matriz de Cholesky, se generó una muestra de tamaño 100,000 para los rendimientos de estas tres acciones. A partir de esta muestra y utilizando el método de remuestreo explicado en la introducción, se generaron 100,000 de muestras, y para cada muestra, se obtuvo el portafolio óptimo sujeto a las condiciones dadas por (5), para obtener las distribuciones de los coeficientes y de la varianza.

Segundo, se construyeron 100,000 de muestras de tamaño 570, por el método de la matriz de Cholesky, y para cada muestra, se obtuvo el portafolio óptimo que satisface las condiciones dadas por (5). Así, se obtuvieron 1,000,000 valores para para los coeficientes y para la varianza mínima, con la finalidad de estimar las distribuciones de estas variables.

Finalmente, se compararon las distribuciones obtenidas por ambos métodos.

B. Sin suponer que los rendimientos siguieran un movimiento Browniano, por remuestreo.

A diferencia del caso anterior en el que se supuso que la muestra sobre la que se realiza el remuestreo se elaboró asumiendo dicho supuesto, en el caso actual, el remuestreo se efectuó sobre la matriz de 570 filas de los rendimientos originales de las tres acciones.

III. Resultados

A. Bajo el supuesto de que los rendimientos siguen una distribución normal.

El portafolio óptimo para la muestra de 570 rendimientos de las tres acciones está dado por: $x_1 = 0.606$, $x_2 = 0.001$ y $x_3 = 0.393$, con una varianza mínima de 0.0016. Tanto en el caso en el que se simuló usando el método de Cholesky, como en el caso de usar remuestreo, se obtuvo que en alrededor de 60 % de los casos las muestras no daban lugar a una solución factible.

En la Fig. 1 se muestran las distribuciones obtenidas para x_1 obtenidas por los dos métodos.

Como puede observarse de esta figura, las diferencias entre las distribuciones obtenidas para x_1 son pequeñas, lo cual, significa que, en este caso específico, el método de remuestreo produjo excelentes resultados. Así mismo, se constata que los valores obtenidos para x_1 muestran una importante variación, con respecto al valor de x_1 obtenido por una sola muestra.

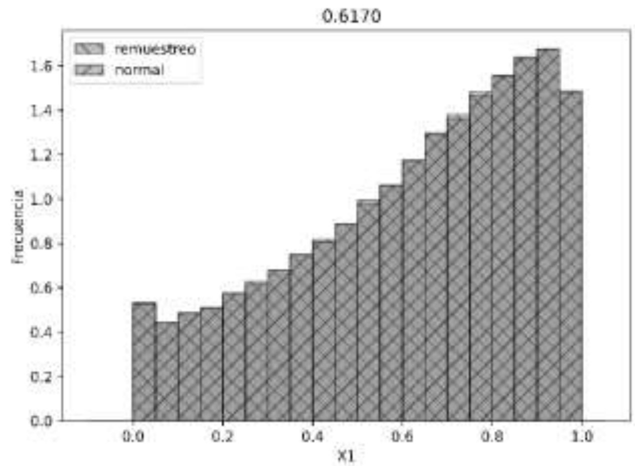

Fig. 1. Distribución empírica de x_1 por los dos métodos, bajo el supuesto de que los rendimientos sigan un movimiento Browniano.

Es decir, el valor obtenido para x_1 obtenido por una sola muestra, definitivamente, no es confiable, por lo menos, para una muestra de tamaño 570, que es notablemente grande.

En la Fig. 2 se muestran las distribuciones empíricas obtenidas para la varianza mínima, obtenidas bajo el supuesto de que los rendimientos siguen un movimiento Browniano por los métodos de la matriz de Cholesky y por remuestreo. Como puede observarse de esta figura las diferencias entre ambas distribuciones es pequeña. Y la varianza mínima se mantuvo con mayor frecuencia cerca de 0.0012

En la Fig. 3 se muestra la distribución bivariada de de x_1 y la varianza minima.

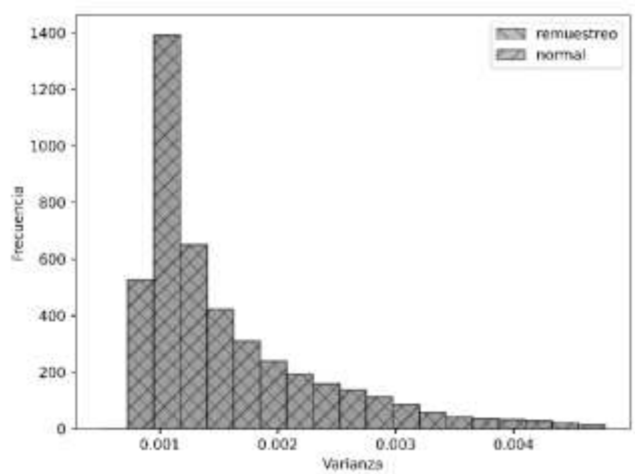

Fig. 2. Distribución empírica de la varianza mínima por los dos métodos, bajo el supuesto de que los rendimientos sigan un movimiento Browniano.

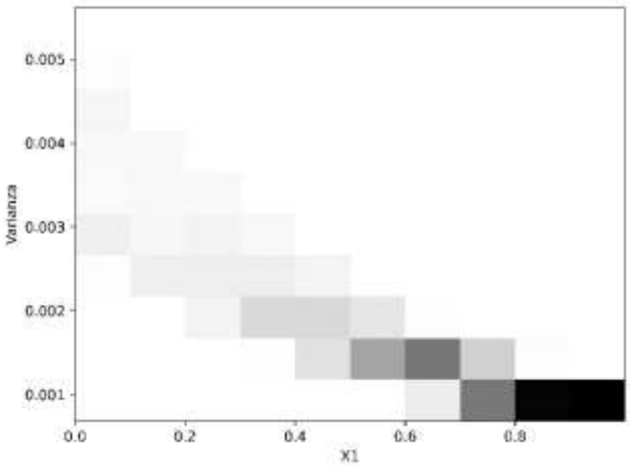

Fig. 3. Distribución empírica bivariada de x_1 y la varianza mínima, bajo el supuesto de que los rendimientos sigan un movimiento Browniano, obtenida por el método de Cholesky.

Se observa que para valores de x_1 mayores que 0.8, la varianza mínima, prácticamente no excede a 0.0012.

En la Fig. 4, se presenta la distribución empírica bivariada de x_2 y la varianza mínima. Se observa que cuando x_2 es menor que 0.1, la varianza mínima, prácticamente no excede a 0.0016.

Finalmente, en la Fig. 5, se presenta la distribución empírica bivariada de x_3 y la varianza mínima.
Se observa que si se toma a x_3 menor que 0.1, la varianza mínima, prácticamente no excederá a 0.0016.

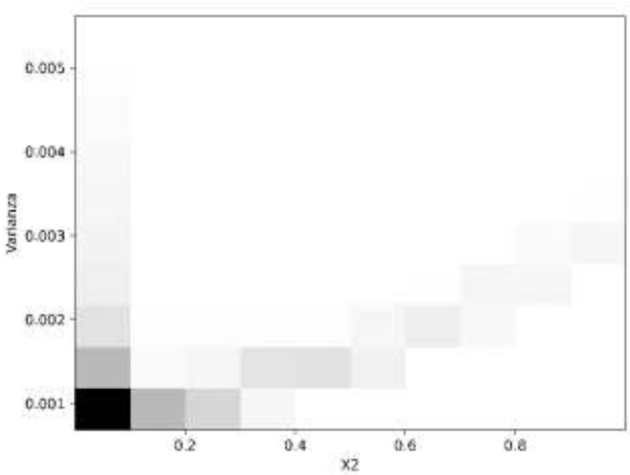

Fig. 4. Distribución empírica bivariada de x_2 y la varianza mínima, bajo el supuesto de que los rendimientos sigan un movimiento Browniano, obtenida por el método de Cholesky.

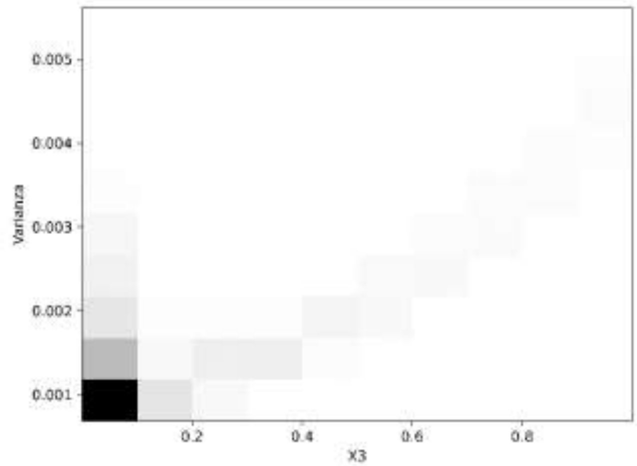

Fig. 5. Distribución empírica bivariada de x_3 y la varianza mínima, bajo el supuesto de que los rendimientos sigan un movimiento Browniano, obtenida por el método de Cholesky.

En la Fig. 6 se encuentra un diagrama de dispersion de x_1 y x_2, en el color del punto corresponde a la varianza del portafolio, obtenida por el método de Cholesky

El resultado que se muestra en esta figura, es congruente con los resultados de las figuras 3 y 4. Por otra parte, se observa una mayor densidad de puntos en la parte inferior derecha del diagrama que además presentan varianza mínima pequeña. Sin embargo, son también probables valores de x_1 y de x_2 con valores de la varianza mínima notablemente mayores que 0.0016, por ejemplo, en los puntos de color verde.

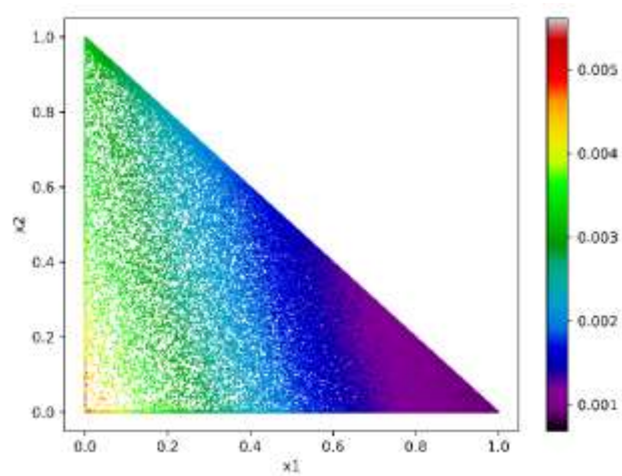

Fig. 6. Diagrama de dispersion de x_1 y x_2, en el que el color del punto corresponde a la varianza del portafolio, obtenida por el método de Cholesky.

Por lo tanto, considerando los resultados de las simulaciones, se concluye que los valores más probables para

x_1 son mayores que 0.8 y para x_2 menores que 0.4. Y para la varianza, los valores mas probables son menores que 0.16.

B Sin suponer que la muestra de los rendimientos sigan una distribución normal.

Los resultados en este caso, son muy similares a los del caso anterior, posiblemente porque la muestra de rendimientos que se consideraron se aleja poco de seguir una distribución normal.

En la Fig. 7, están las distribuciones superpuestas de la varianza mínima, utilizando los métodos de la matriz de Cholesky y por remuestreo. En esta figura, se observa una mayor diferencia entre las dos distribuciones que las que se tienen en la Fig. 2. Y en este caso, los resultados obtenidos por remuestreo son más confiables, ya que con este método, no se presupone la normalidad de la distribución de los rendimientos.

Sin embargo, las diferencias en las distribuciones de los coeficientes, en este caso, también son muy pequeñas, como puede observarse en la Fig. 8.

Un comentario final importante es que las varianzas de los coeficientes, disminuyen cuando el número de acciones aumenta. Por ejemplo, la varianza de uno de los coeficientes para una muestra de tres acciones fue de 0.031, mientras que para una muestra de 12 acciones fue de 0.007.

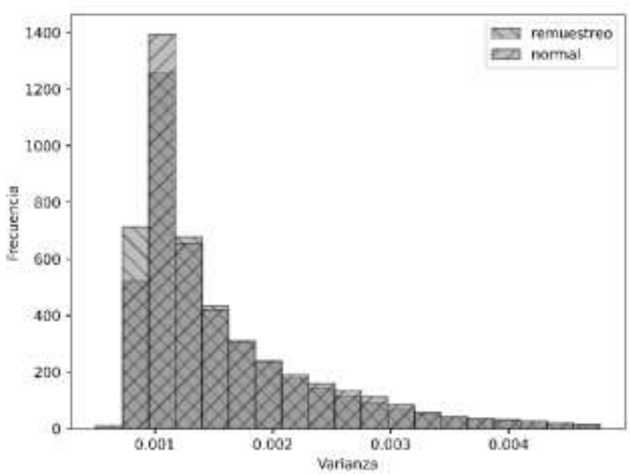

Fig. 7. Distribución empírica de la varianza mínima por los dos métodos, sin el suponer que los rendimientos sigan un movimiento Browniano

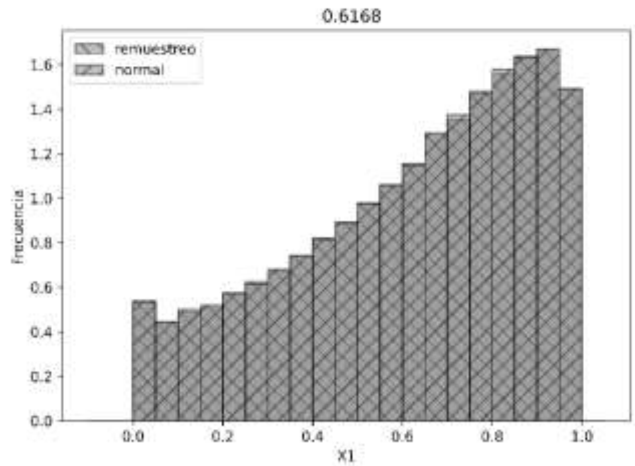

Fig. 8. Distribución empírica de x_1 por los dos métodos, sin suponer que los rendimientos sigan un movimiento Browniano.

En cuanto a las varianzas mínimas, se observa que también disminuye la varianza al aumentar el número de variables. Y este comentario es importante, porque significa que si se considera un portafolio de un número grande de acciones, la varianza de los coeficientes y de la varianza mínima, pueden ser pequeñas, disminuyendo la incertidumbre en la definición del portafolio óptimo.

IV. Discusión

Los resultados obtenidos al calcular el portafolio óptimo especificado por (5) para una muestra moderadamente grande (de tamaño 570), dependen fuertemente de la muestra seleccionada; es decir, al tomar diferentes muestras del mismo tamaño para los rendimientos de las mismas acciones pueden obtenerse soluciones notablemente diferentes y en muchos casos, puede ocurrir que no exista una solución que cumpla con las restricciones dadas por (5). Por esta razón, no es una buena práctica la de calcular el portafolio óptimo dada una muestra real de rendimientos, sino que es necesario recurrir a técnicas de simulación de Montecarlo, para explorar lo que puede ocurrir con otras muestras igualmente probables de rendimientos.

El hecho de que los resultados obtenidos por remuestreo y usando la matriz de Cholesky, suponiendo que los rendimientos siguieran una distribución normal, sean tan similares, abona en favor de la técnica de remuestreo.

V. CONCLUSIONES

La técnica de remuestreo produce resultados confiables en la obtención de las distribuciones de los coeficientes y de la varianza mínima.

Los coeficientes y la varianza mínima de un portafolio óptimo tienen una importante dependencia con la muestra seleccionada. Por lo tanto, al tratar de obtener un portafolio óptimo es conveniente estudiar las distribuciones de los coeicientes y de la varianza mínima, por medio de remuestreo, si no se tiene la seguridad de que los rendimientos sigan una distribución multinormal.

Es necesario estudiar más a fondo la relación entre las varianzas de las distribuciones de los coeficientes y de la varianza mínima y el número de activos considerados. Para el caso en el que los rendimientos sigan una distribución multinormal, posiblemente pueda hacerse analíticamente.

AGRADECIMIENTOS

A la Escuela Superior de Física y Matemáticas por las facilidades otorgadas para poder realizar esta investigación.

REFERENCIAS

[1] H. Markowitz, "Portfolio selection", *The Journal of Finance*, vol. 7, no. 1. pp. 77-91, Mar. 1952

[2] D. Xie, "Empirical Study of Markovitz Portfolio Theory and Model in the Selection of Optimal Portfolio in Shanghai Stock Exchange of China", *Journal of Economics, Business and Management*, vol. 9, no. 4, pp. 87-92, Dec. 2021

[3] A. Mood, F. Graybill, D. Boes, "Introduction to Theory of Statistics", McGraw-Hill Book Company, 1974.

[4] B. Efron, R. Tibshirani, "An introduction to the Bootstrap", Chapman & Hall, Inc., 1993.

[5] EuroScipy tutorial team, Editors: Valentin Haenel, Emmanuelle Gouillart, Gaël Varoquaux, "Python Scientific lecture notes", Nov. 2013, pp. 251-265. Available: http://scipy-lectures.org/