

Estudio comparativo de dos modelos de volatilidad variable en procesos de difusión

Ramón Sebastián Salat Figols¹

¹Departamento de Matemáticas, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: rssalat@ipn.mx

Resumen — En este trabajo se realiza un estudio comparativo de dos modelos de volatilidad variable en procesos de difusión. Se estiman los parámetros para ambos modelos y se comparan los resultados, observando que uno de los modelos tiende a sobrestimar la varianza, mientras que el otro, tiende a infraestimar la varianza y se interpreta el resultado.

Palabras Clave – Proceso de difusión, volatilidad variable, calibración, método de Milstein

Abstract — In this work, a comparative study of two models of variable volatility in diffusion processes is carried out. The parameters for both models are estimated, and the results are compared, observing that one of the models tends to overestimate the variance, while the other tends to underestimate the variance and the result is interpreted.

Keywords — Diffusion process, variable volatility, calibration, Milstein method

I. INTRODUCCIÓN

Un modelo ampliamente utilizado para modelar el precio de las acciones en el mercado bursátil esta dado por la siguiente ecuación de flujo:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

Donde S_t es el precio de la acción en el tiempo t , μ es un parámetro que se le llama deriva, σ es otro parámetro que se le llama volatilidad y W_t es un movimiento Browniano en el intervalo $[0, t]$. Para resolver esta ecuación diferencial se utiliza el lema de Itô [1]. En general, si μ , σ y F son funciones de S_t :

$$dF = \left(\mu \frac{\partial F}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} \sigma^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S_t} \sigma dW_t \quad (2)$$

Aplicando el lema de Itô a $F(S_t, t) = \ln(S_t)$, y considerando a μ y a σ constantes, se obtiene:

$$\ln(S_t) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma \int_{t_0}^t dW_t \quad (3)$$

Donde la integral es una integral de Itô, que vale W_t . Por lo tanto, finalmente resulta:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma W_t} \quad (4)$$

A $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ se le llama rendimiento logaritmizado en el intervalo $[t_0, t]$. Como W_t sigue una distribución normal con media 0 y varianza t , el rendimiento logaritmizado sigue una distribución normal con media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0)$ y varianza $\sigma^2 (t - t_0)$. Esta propiedad, permite estimar a los parámetros μ y σ , a partir de datos reales de los rendimientos logaritmizados.

Se puede considerar un modelo más general:

$$S_t = a(S_t, t) dt + b(S_t, t) dW_t \quad (5)$$

En la práctica se observa con frecuencia, que la volatilidad σ depende inversamente con el precio S_t . Por tal motivo, es razonables suponer un modelo como el siguiente:

$$b(S_t, t) = a S_t^g \quad (6)$$

A este modelo se le llama de elasticidad constante de la varianza (CEV) [2]. Si $g = 1$, entonces la volatilidad es constante e igual a a .

Otro modelo posible es el siguiente:

$$b(S_t, t) = \left(a + \frac{b_1}{c + S_t} \right) S_t \quad (7)$$

Donde a, b_1, c son constantes positivas y S_t es el precio de la acción en el tiempo t . En ambos modelos se considera $a(S_t, t) = \mu S_t$.

Si se substituye el valor de $b(S_t, t)$ dado por (6) o por (7) en la ecuación (1), entonces la solución de la ecuación diferencial se complica. Una alternativa de solución es utilizar métodos numéricos, por ejemplo, el método de Milstein [3].

Si S_t satisface (5), y $\{t_i = i \frac{t}{n}\}_{i=0}^n$ es una partición del intervalo $[0, t]$ con $\Delta t = \frac{t}{n}$ y $\Delta W_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$:

¹Este Becario de EDD del IPN y de SIBE de la COFAA.

$$\begin{aligned}
S_{t_{i+1}} = & S_{t_i} + a(S_t, t)\Delta t + b(S_t, t)\Delta W_{t_i} \\
& + \frac{b(S_t, t) \frac{\partial b(S_t, t)}{\partial S_t}}{2} [(\Delta W_{t_i})^2 - \Delta t] \\
& + O\left(\Delta t^{\frac{3}{2}}\right)
\end{aligned} \quad (8)$$

Donde $O\left(\Delta t^{\frac{3}{2}}\right)$ significa que si E es el error de aproximación, la probabilidad de que $|E/\Delta t^{\frac{3}{2}}|$ sea mayor que $M > 0$ pueda hacerse tan pequeña como se quiera.

El objetivo de este trabajo es el de comparar los resultados obtenidos al modelar un conjunto de precios reales de acciones usando las ecuaciones (6) y (7).

Para la minimización numérica se emplea el método "Constrained optimization by linear Approximation" (COBYLA) [4].

II. METODOLOGÍA

Se consideran dos listas de 100 precios diarios, reales, correspondientes a dos acciones. El procedimiento para estimar los parámetros correspondientes a las ecuaciones (6) y (7) es el siguiente: Se divide el tiempo de un día, considerado como unitario, en n_i intervalos de igual longitud. Dado el precio de la acción al cierre en un día, se estima el precio al cierre del día siguiente con valores específicos de los parámetros. Y se considera la suma de los cuadrados de las diferencias entre las estimaciones con los valores reales al cierre. Ésta suma es una función de los parámetros. Se utilizará optimización numérica para encontrar los parámetros que minimicen dicha suma.

Para mejorar la precisión de las aproximaciones calculadas por el método de Milstein, se usa el método de reducción de varianza por variables antitéticas, logrando un porcentaje de reducción de varianza de más de 95 %. Para aplicar el método, mediante la ecuación (8), se calculan $S_{t_{i+1}}^{(1)}$ tal y como se calcula $S_{t_{i+1}}$ y se calcula $S_{t_{i+1}}^{(2)}$ cambiando el signo al término $b(S_t, t)\Delta W_{t_i}$. Finalmente, al terminar las n_i iteraciones considera $S_{n_i} = (S_{n_{i+1}}^{(1)} + S_{n_{i+1}}^{(2)})/2$.

III. RESULTADOS

A. Precisión del método de Milstein.

Se realizó una comprobación sencilla acerca de los resultados obtenidos por el método de Milstein. Se consideró a una acción con $\mu = -0.002$ y $\sigma = 0.08$, constante, con precio inicial de $S_0 = 10$. Se simularon 1000 valores para S_1 . Y se promediaron para tener una estimación del valor esperado de S_1 , que se obtiene mediante la fórmula $E(S_1) = S_0 e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})}$. El error porcentual obtenido fue de 0.305 %, lo cual puede indicar un ligero sesgo al usar el método de Milstein [5]. Por otro lado, se realizó el mismo cálculo usando la técnica de

reducción de varianza de variables antitéticas, obteniéndose una reducción porcentual de la varianza de 99.7 %.

B. Comparación de los dos modelos para dos acciones específicas.

Se aplicaron ambos modelos a dos acciones. De aquí en adelante, al modelo definido por la ecuación (6), se le denominará modelo I y al determinado por la ecuación (7) se le denominará modelo II. A una de las acciones se le denominará 1 y a la otra, 2. En la Fig. 1 se presenta la gráfica simultánea de los precios y las volatilidades para la acción 1 con el modelo I. A continuación, se transcriben los resultados obtenidos en la optimización:

```

-0.0030953169935153593 0.08880271672593079
fun: 4.604597871983628e-06
success: True
x: array([ 3.81016042e-05, 2.90725349e-02, -
1.22826530e-01])

```

En estos resultados aparecen los valores de μ y σ , ajustando un modelo de volatilidad constante, valor mínimo de la función optimizada, si el algoritmo logró encontrar el mínimo o no y los valores de los parámetros, respectivamente. En los valores de los parámetros aparecen μ , a y g , respectivamente.

Y en la Fig. 2, se muestra la gráfica simultánea para los precios de misma acción 1 con el modelo II, cuyos resultados fueron los siguientes:

```

-0.0030953169935153593 0.08880271672593079
fun: 0.0006271258178646058
success: True
x: array([-3.55246068e-04, 1.27163625e-01,
1.03611729e+00, 1.99931762e+00])

```

En este caso, en el último renglón aparecen los valores de las constantes a , b y c .

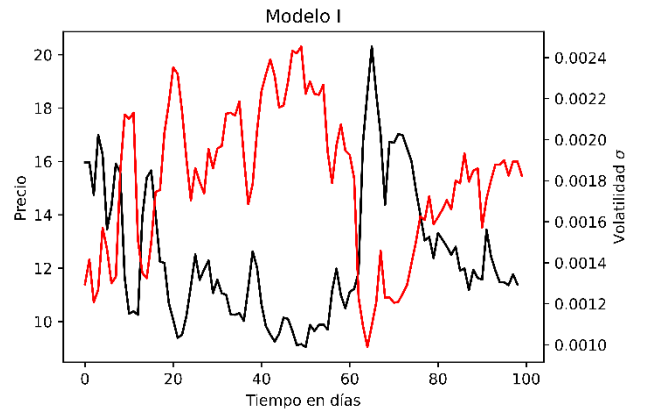


Fig. 1. Gráfica simultánea del precio de la acción 1 y la volatilidad, con el modelo I.

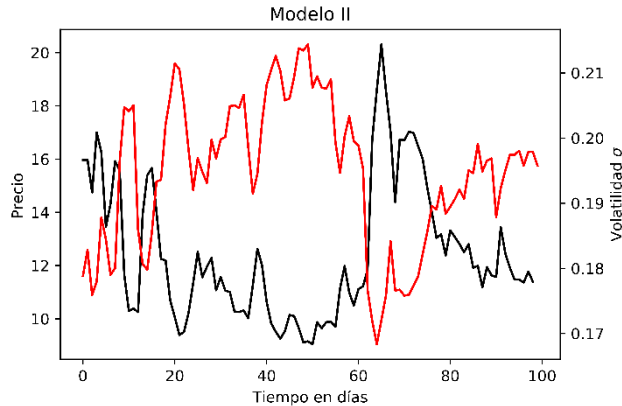


Fig. 2. Gráfica simultánea del precio de la acción 1 y la volatilidad, con el modelo II.

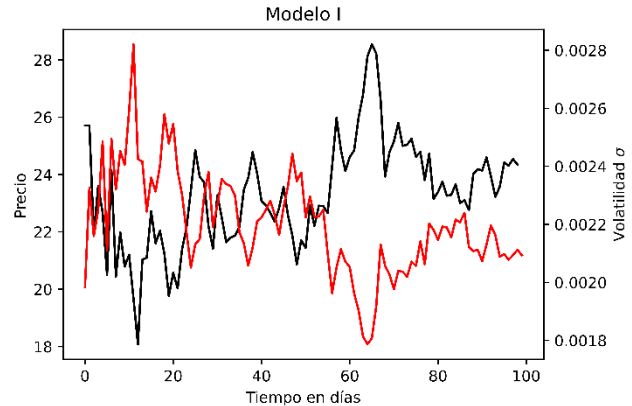


Fig. 3. Gráfica simultánea del precio de la acción 2 y la volatilidad, con el modelo I.

Como puede observarse de estas dos gráficas, el modelo II considera volatilidades mucho mayores que el modelo I. Además, al considerar a la volatilidad obtenida suponiéndola constante, que es de 0.0888, se sugiere que el modelo I infraestima a la varianza, mientras que el modelo II, la sobrestima.

En la Fig. 3 y Fig. 4, se presentan los resultados para la acción 2 con los modelos I y II, respectivamente. Los resultados para la acción 1 fueron:

```
-0.0009471289800608311 0.051505517589963655
fun: 2.1866078228359483e-05
success: True
x: array([-6.42711294e-06, 5.09786183e-02,
9.13377382e-05])
```

Y para la acción 2:

```
-0.0009471289800608311 0.051505517589963655
fun: 5.48281090174797e-05
success: True
x: array([5.55125274e-06, 5.14725759e-02,
7.49898385e-01, 2.12516353e+00])
```

Nuevamente se observa que el modelo I produce volatilidades notablemente más pequeñas que el modelo II. En este caso, la volatilidad estimada, suponiéndola constante es de 0.0515. El modelo II produce volatilidades más cercanas a la volatilidad constante.

Las volatilidades pequeñas que resultan en el modelo I, tienen una consecuencia importante: Cuando las volatilidades son demasiado pequeñas, el término estocástico de la ecuación (1) se vuelve pequeño en comparación con el término determinista y como consecuencia, el modelo deja de explicar las importantes variaciones aleatorias en los precios de la acción. Y también, si dichas volatilidades son demasiado grandes, entonces se puede sobreestimar la componente estocástica.

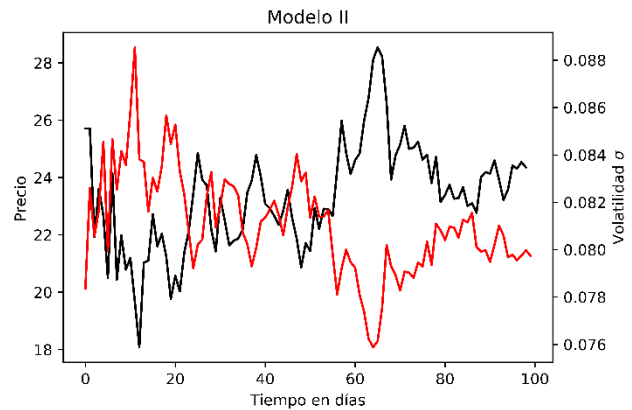


Fig. 4. Gráfica simultánea del precio de la acción 2 y la volatilidad, con el modelo II.

IV. DISCUSIÓN

El uso de diferentes modelos para la volatilidad variable puede producir modelos que otorgan una importancia notablemente diferente a la componente estocástica en relación a la componente determinista en la ecuación de difusión (1).

Para lograr una buena aproximación usando el método de Milstein, aún empleando reducción de varianza, requiere un notable esfuerzo computacional. Es posible estimar los parámetros empleando otros métodos, tales como maximizar la función de verosimilitud, aprovechando el hecho de que en intervalos pequeños de tiempo, el rendimiento sigue una distribución normal. Pero en la práctica, los rendimientos logaritmizados de las acciones, frecuentemente no pasan una prueba estadística acerca de la normalidad de la distribución.

El hecho de emplear datos a intervalos de un día, requiere suponer que los parámetros no varían en dicho intervalo de tiempo. Esta suposición afecta a la precisión de los resultados.

Existen otros modelos importantes para la volatilidad variable, tales como los de Heston [6] y Garch [7], con respecto a los cuales, se puede realizar una investigación similar.

V. CONCLUSIONES

En el uso de diferentes modelos para la volatilidad variable, es necesario considerar la magnitud de la variación estocástica con relación a la componente determinista.

Es posible emplear el método de Milstein para calibrar los parámetros del modelo, pero aún empleado reducción de varianza, el esfuerzo computacional es notable.

Las posibles sobreestimaciones e infraestimaciones de la varianza, pueden deberse a que ambos modelos solamente emplean al precio de la acción como determinante de la varianza. Es posible que existan otras variables que también contribuyan a definir el valor de la volatilidad.

Este trabajo es un estudio inicial que abre la perspectiva para la realización de otros trabajos más detallados, con especial interés en la calidad de la aproximación utilizando el método de Milstein.

AGRADECIMIENTOS

A la Escuela Superior de Física y Matemáticas por las facilidades otorgadas para poder realizar esta investigación.

REFERENCIAS

- [1] D.L. McLeish, "Montecarlo Simulation & Finance", Wiley finance series, Ed. Wiley, 2005, ch. 2, pp. 53-63.
- [2] J.C. Cox, "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions", *Reprinted in The Journal of Portfolio Management*, No. 23, pp. 15-17, Dec. 1975.
- [3] G. N. Mil'shtein, "Approximate Integration of Stochastic Differential Equations", *Theory of Probability & Its Applications*, Vol. 19, No. 3, pp. 557-562, 1975.
- [4] M.J.D. Powell, "A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation", *Advances in Optimization and Numerical Analysis*, eds. S. Gomez and J-P Hennart, Kluwer Academic (Dordrecht), pp. 51-67, 1994.
- [5] X. Wang, P. Phillips, J. Yu, "Bias in estimating multivariate and univariate diffusions", *Journal of Econometrics*, Vol. 161, No. 2, pp. 228-245, April 2011.
- [6] S. Heston, "A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options", *Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327-343, 1993.
- [7] R.F. Engle, "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, Vol. 50, No. 4, pp. 987-1007, 1982.