

Propagación de haces Wavelet Airy

C. E. González-Anguiano, I. E. Becerra-Torres, J. A. Anaya-Contreras, A. Zúñiga-Segundo,

Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México

Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: azuniga@esfm.ipn.mx

Resumen — Estudiamos la propagación de superposiciones de haces Airy y mostramos sus efectos de autoenfoco y propagación cuasi-adifraccional. También proponemos una sencilla expresión analítica para la propagación libre de cualquier campo inicial, basada en los llamados estados número del oscilador armónico cuántico, lo que nos permite estudiar las propiedades de auto-reconstrucción de los haces Airy.

Palabras Clave – Haz Airy, wavelet, estados de número

Abstract — We study the propagation of superpositions of Airy beams and show their autofocus effect and quasi-adiffractive propagation. We also propose a simple analytical expression for the free propagation for any initial field, based in the so-called number states of the quantum harmonic oscillator, which allows us to study the self-healing properties of Airy beams.

Keywords — Airy Beam, wavelet, number states

I. INTRODUCCIÓN

La física de la propagación de la luz comenzó con el estudio de la difracción de la mancha de Poisson o mancha de Arago [1], y de su explicación mediante la integral de Fresnel. Además de su relevancia histórica, actualmente es el fundamento de las investigaciones recientes sobre la cualidad onda-partícula y el papel de la decoherencia cuántica [2], de las desigualdades tipo Bell [3] y la de los “pasos” aleatorios coherentes en el espacio libre [4].

La noción de que la luz se propaga en línea recta puede ser refutada mediante el uso de una nueva familia de haces de luz. En 2007 se demostró tanto teórica como experimentalmente, la existencia de los haces Airy acelerados [5-12]. Estos haces de luz se doblan gradualmente siguiendo trayectorias parabólicas en su plano de propagación, extendiéndose hacia sus regiones no oscilatorias. Este haz fue originalmente propuesto en el contexto de la mecánica cuántica como una solución no dispersiva, (non-spreading solution), de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre [13].

Es decir, un haz Airy es un haz óptico que al propagarse conserva su forma o estructura de intensidad, y su máximo de intensidad se mueve a lo largo de una trayectoria curva. Sin ser redundantes, los haces Airy al propagarse siguen siendo haces Airy, tanto en propagación libre como un potencial lineal [5,14,15]. Y al controlar el gradiente del medio, es posible reducir a cero su aceleración, e incluso a invertir su signo [16].

Un efecto novedoso fue la realización experimental de las ondas de autoenfoco abrupto [17]. Para esto fue usado un haz Airy con una distribución de intensidad radialmente simétrica; y como este haz sigue al propagarse una trayectoria parabólica hacia su foco, exhibió en este punto lo que se llamó autoenfoco abrupto. Ahora es claro que, debido a sus propiedades de aceleración y autoenfoco abrupto, los haces Airy son ampliamente utilizados para muchas aplicaciones en diferentes ramas de la óptica [15,18].

Por otra parte, el fenómeno de auto-reparación (self-healing) [19], definido como la capacidad de un haz para auto-reconstruirse cuando para por alguna obstrucción, ha atraído el interés de muchos investigadores [20,21]. Se ha demostrado para haces: Airy [22], Pearcey [23], y cáusticos [24].

A. Propagación libre

Como se ha mencionado, el concepto de los haces acelerados surgió con el trabajo de Berry y Balazs [13], basados en la solución que preserva el perfil de intensidad al propagarse libremente por medio de la ecuación de Schrödinger, este haz es de la forma de una función de Airy ideal. Sin embargo, esta solución no es cuadráticamente integrable, pero esto fue obviado mediante el uso de haces Airy de energía finita [5], que utilizan una función exponencial o función de apertura $\exp(\gamma x)$, para la coordenada transversal x ; es decir, escribimos

$$E(x, 0) = \exp(\gamma x) \text{Ai}(Bx + A) \quad (1)$$

donde γ es un parámetro positivo que mantiene al haz Airy $\text{Ai}(x)$ con energía finita [5,25,26]. Las constantes A y B trasladan y escalan la coordenada x respectivamente. De esta forma, las constantes A y B semejan a la acción de los operadores de desplazamiento y compresión, respectivamente [27].

Para propagar el haz de Airy, se utiliza la ecuación de onda paraxial ($k = 1$), o la ecuación de Schrödinger para el potencial libre [5]:

$$i \frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\hat{p}^2}{2} E, \quad (2)$$

donde $E(x, z)$ es el campo eléctrico, $\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial x}$ con x y z son las coordenadas adimensionales transversal y de propagación respectivamente. Una forma equivalente y más sencilla de resolver la ecuación de Schrödinger es notar que la ecuación (2) tiene como solución

$$E(x, z) = \exp\left(-i \frac{z}{2} \hat{p}^2\right) E(x, 0), \quad (3)$$

donde $E(x, 0)$ está definido en la ecuación (1). Aplicando el operador anterior podemos deducir una expresión analítica para el campo Airy propagado

$$E(A, x, z) = (8\pi B\gamma)^{\frac{1}{4}} \exp(\gamma x + i\Phi) \text{Ai}\left[B(x + i\gamma z) + A - \frac{1}{4}B^4 z^2\right] \quad (4)$$

donde la fase $\Phi = -\frac{1}{12}B^6 z^3 + \frac{1}{2}\gamma^2 z + \frac{1}{2}B^3(x + i\gamma z) + \frac{1}{2}AB^2 z$. Cuando los parámetros A y B toman los valores $A = 0$ y $B = 1$, la ecuación (4) se reduce al mismo resultado que la referencia [5].

B. Propagación de haces Airy

En general, la solución de la ecuación de onda paraxial es una superposición de estados. Debido a la interferencia cuántica las propiedades de tal superposición son muy diferentes a las propiedades de los estados constituyentes [3]. Por lo tanto, construimos una superposición de dos haces Airy distintos que pueden escribirse como

$$E_1(x, z) = \frac{1}{N_1} [E(A, x, z) + E(A, -x, z)], \quad (5)$$

donde N_1 es un factor de normalización definido por

$$N_1^2 = 2 \left[1 + 2^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{B}} \exp\left(-\frac{2\gamma^3}{3B^3} + \frac{2A\gamma}{B}\right) \text{Ai}\left(2^{\frac{2}{3}}A\right) \right]. \quad (6)$$

Similarmente, si N es una constante real, proponemos

$$E_2(x, z) = \frac{1}{N_2} [E(NA, x, z) + E(NA, -x, z)], \quad (7)$$

con

$$N_2^2 = 2 \left[1 + 2^{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{B}} \exp\left(-\frac{2\gamma^3}{3B^3} + \frac{2NA\gamma}{B}\right) \text{Ai}\left(2^{\frac{2}{3}}NA\right) \right] \quad (8)$$

Finalmente, suponemos otra superposición, que conecta las superposiciones de E_1 y E_2 , con un parámetro de control de peso S ; entonces la superposición de los haces Airy propagados será,

$$E(x, z) = \frac{1}{N_S} [E_1(x, z) + SE_2(x, z)], \quad (9)$$

donde

$$N_S^2 = 1 + |S|^2 + \frac{2(S+S^*)}{N_1 N_2} \left[g_1 + 2^{\frac{2}{3}} g_2 \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{B}} \text{Ai}\left(\frac{(N+1)A}{2^{1/3}}\right) \right], \quad (10)$$

con $g_1 = \exp\left(-\frac{(N-1)^2 A^2 B}{8\gamma}\right)$ y $g_2 = \exp\left(-\frac{2\gamma^3}{3B^3} + \frac{(N+1)A\gamma}{B}\right)$. Basados en la ecuación (9), se estudia fácilmente la propagación de la superposición de haces Airy, que mostraremos en las siguientes figuras. A partir de ahora, en todos los gráficos de contorno, pasarán del color rojo al azul y corresponderán a la alta y baja intensidad respectivamente.

La figura 1(b) muestra en una gráfica de contorno, la evolución de la intensidad correspondiente a la propagación libre de una superposición de cuatro haces Airy de energía finita en función de la distancia z , calculada a partir de la ecuación (9) con los parámetros $\gamma = 0.05$, $A = 1.0$, $B = 1.0$, $S = 1.0$ y $N = 0.5$. Esta distribución de intensidad exhibe su capacidad de autoenfoque, y se observa que los máximos de la intensidad siguen una trayectoria parabólica hacia su foco localizado a aproximadamente en $z = 2.6$ [17]. En $z = 0$ [Fig. 1(e)], el haz tiene un perfil amplio de intensidad, que al evolucionar se concentra en el plano focal $z = 2.6$; debido a la conservación de la energía su intensidad alcanzará abruptamente un pico y se enfocará en una región focal pequeña, como se muestra en la Fig. 1(d). Conforme la propagación continúa, el haz se propagará formando “mosaicos” de intensidad sobre la trayectoria parabólica de sus máximos de intensidad [Fig. 1(c)], se observa también que su perfil de intensidad central decrece de manera oscilatoria como en la Fig. 1(a).

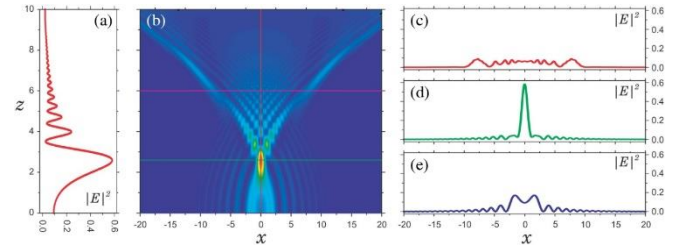


Fig. 1. (b) Amplitud al cuadrado de la propagación libre de la superposición de dos paquetes de haz Airy de energía finita en función de la distancia z , calculando a partir de la ecuación (9) a diferentes distancias: (a) $x = 0$, (e) $z = 0$, (d) $z = 2.6$, y (c) $z = 6.0$; $A = 1.0$, $B = 1.0$, $\gamma = 0.05$, $S = 1$, y $N = 0.5$.

De manera similar, la Fig. 2 (b) representa en un gráfico de contornos la evolución de la intensidad correspondiente a

la propagación libre de la superposición de dos haces Airy de energía finita ($S = 0$) como función de la distancia z , calculada a partir de la ecuación (9). En este caso con los parámetros $\gamma = 0.1, A = 0.35, B = 0.85$ y $S = 0$. Una vez más, esta distribución de intensidad Airy exhibe su capacidad de autoenfoco siguiendo una trayectoria parabólica hasta concentrarse en su foco $z = 2.8$ [17]. En $z = 0$ [Fig. 2(e)], se muestra el haz inicial con un perfil amplio de intensidad que se concentra o enfoca abruptamente en el plano focal $z = 2.8$, donde su intensidad alcanza un pico en una región focal pequeña, como se muestra en la Fig. 2 (b). Nuevamente, conforme su propagación continúa, sus máximos de intensidad se propagan formando “mosaicos” de intensidad sobre la trayectoria parabólica [Fig. 2(c)], y su perfil de intensidad central decrece de manera oscilatoria como se muestra en la Fig. 2(a).

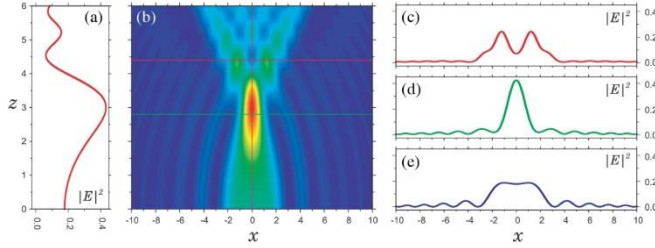


Fig. 3. (b) Amplitud al cuadrado de la propagación libre de la superposición de dos paquetes de haz Airy de energía finita en función de la distancia z , calculado a partir de la ecuación (9) a diferentes distancias: (a) $x = 0$, (e) $z = 0$, (d) $z = 2.8$, y (c) $z = 4.4$; $A = 0, B = 0.85, \gamma = 0.1$ y $S = 0$.

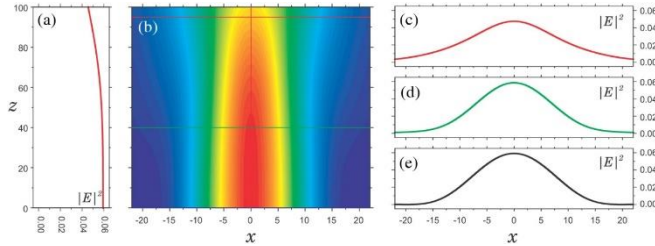


Fig. 2 (b) Amplitud al cuadrado de un haz no-difractante, obtenido mediante la superposición de dos haces Airy de energía finita como función de la distancia z , calculando a partir de la ecuación (9) a diferentes distancias: (a) $x = 0$, (e) $z = 0$, (d) $z = 40$, (c) $z = 95$; $A = 0.35, B = 0.15, \gamma = 0.1$ y $S = 0$.

Finalmente, en la Fig. 3(b), se muestra la propagación libre de un haz no difractante obtenido mediante la superposición de dos haces Airy de energía finita en función de la distancia z [7], calculando a partir de la ecuación (9) con los parámetros $\gamma = 0.1, A = 0.35, B = 0.15$, y $S = 0$. Esta distribución de intensidad Airy se mantiene casi uniforme para $0 \leq z \leq 40$, como se muestra en las Figs. 3(e) y 3(d). A medida que continúa la propagación, el haz tiene una ligera dispersión, como se observa en la Fig. 3(c), acompañado de disminución de intensidad en su perfil central, como se muestra en la Fig. 3(a).

II. ESTADOS DE NÚMERO.

A diferencia de las propagaciones anteriores, para el caso de un producto de haces Airy, hasta nuestro conocimiento no hay una expresión analítica para obtener tal propagación. En este caso, se ha utilizado la integral de Huygens-Fresnel para resolver la ecuación de onda paraxial, donde se obtiene la propagación numéricamente [26]. Derivamos una fórmula analítica para la propagación libre de cualquier haz inicial. La propagación libre se puede describir como la secuencia o el producto de un operador de compresión y una transformada fraccionaria de Fourier [28]. Entonces la función propagada será,

$$\begin{aligned} E(x, z) &= \exp\left(-i\frac{z}{2}\hat{p}^2\right)E(x, 0) \\ &= \hat{S}(ire^{i\omega}) \exp\left[-i\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right)\right]E(x, 0) \\ &= \hat{S}(\xi)\hat{F}(\omega)E(x, 0) \end{aligned} \quad (11)$$

donde \hat{n} es el operador de número, $\hat{S}(\xi)$ el operador de compresión [29, 30], y $\hat{F}(\omega)$ la transformada fraccionaria de Fourier [31]. Hemos definido $\xi = ire^{-i\omega}$, con

$$r = \ln\left[\frac{z}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{z}{2}\right)^2}\right], \quad \omega = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{1-iz/2}{1+iz/2}\right) \quad (12)$$

Por otra parte, la función $E(x, z)$ puede ser expandida en estados de número $|n\rangle$ como

$$\begin{aligned} E(x, z) &= \langle x| \exp\left(-i\frac{z}{2}\hat{p}^2\right) |E\rangle, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle x|\hat{S}(\xi)\hat{F}(\omega)|n\rangle\langle n|E\rangle, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x, z)\langle n|E\rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

donde

$$E_n(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1+iz}} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2(1+iz)}\right) H_n\left(\frac{x}{\sqrt{1+iz}}\right), \quad (13)$$

donde H_n es un polinomio de Hermite de orden n y

$$\langle n|E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) E(x, 0) dx. \quad (15)$$

Teniendo el operador de evolución, en principio podemos calcular campos que se propagan a lo largo del eje z para cualquier estado inicial que queramos; en particular, observamos la auto-reparación de haces Airy [32] y los wavelet Airy [26].

III. RESULTADOS

De lo anterior podemos contestar a la pregunta: ¿Será posible simular una auto-reparación o self-healing de un haz Airy? La figura 4(c) representa en un gráfico de contornos la evolución de la intensidad correspondiente a la propagación libre de un haz Airy de energía finita como función de la distancia de propagación z , calculada a partir de la ecuación (4) con los parámetros $\gamma = 0.1$, $A = 0.0$ y $B = 1.0$, o bien utilizando la ecuación (13) con el estado inicial $E(x, 0) = \sqrt{C}e^{0.1x\text{Ai}(x)}$, donde \sqrt{C} es una constante de normalización como es mostrada en la figura 4(e). En ambos casos obtenemos el mismo resultado. Aquí podemos ver la característica más notable del haz Airy, que es su capacidad para acelerarse libremente en ausencia de cualquier potencial externo [13,18].

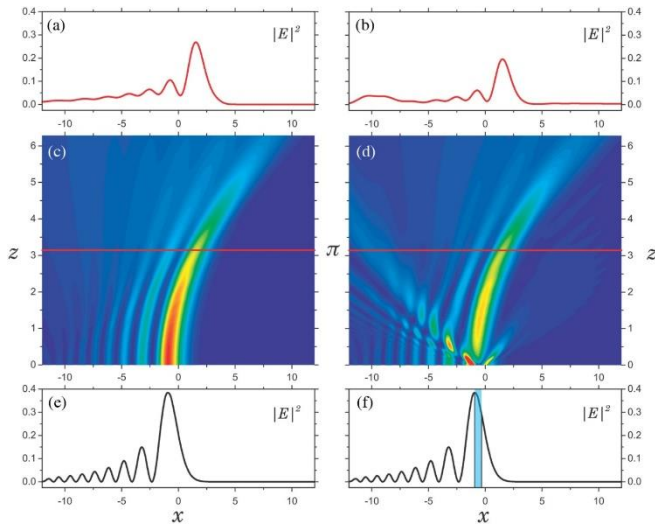


Fig. 4. (c)(d) Perfil de la distribución de intensidad que muestra la autoreflexión y autoreparación en función (x, z) , respectivamente, para un haz Airy de energía finita (e) inicialmente libre de obstrucción (f) inicialmente obstruido. (a)(b) Muestran que los perfiles de intensidad son muy similares para $z = \pi$.

Otra propiedad fundamental del haz Airy es su capacidad de autoreconstruirse durante su propagación [18,22]. La figura 4(d) muestra la intensidad, en una gráfica de contornos, la evolución de la intensidad correspondiente a la propagación libre de un haz Airy de energía finita inicialmente obstruido. Este perfil fue calculado usando la Ec. (13). La obstrucción se muestra en la Fig. 4(f), por una franja azul de 0.6 de ancho centrada en $x = -0.55$. En esta franja, el campo $E(x, 0) = 0$ para $-0.85 \leq x \leq -0.25$. La obstrucción absorbe al campo y, los bordes los dispersan, ne consecuencia la intensidad se ve considerablemente perturbada, sin embargo, el campo reaparece gradualmente mientras se propaga. El haz Airy debe propagarse a través de la “sombra” de la obstrucción antes de ser reconstruido. Se confirma comparando con las Figs. 4(a) y 4(b), que los

perfiles de intensidad de los haces Airy en $z = \pi$ son muy similares; es decir, el perfil en la Fig. 4(c) ha sido recuperado.

Vale la pena señalar que en la referencia [32], los autores realizaron cálculos numéricos utilizando un modelo de elemento finito (COMSOL, Inc., Burlington, MA, EE. UU.) y encontraron que los haces Airy exhiben propiedades de auto-recuperación. Por el contrario, utilizando la ecuación (13) para la propagación en el espacio libre nos permite el cálculo directo de la auto-reparación del haz Airy de energía finita.

Finalmente, la propagación paraxial de haces Airy por medio de la integral de Huygens-Fresnel ha sido sujeto de varias investigaciones. En particular, producirá la función de onda propagada tipo wavelet Airy [26], definidas como el producto de dos funciones de Airy, es decir,

$$A(x) = \sqrt{CAi}(x+p)Ai(-x+p), \quad (16)$$

donde p y q son constantes reales arbitrarias llamadas parámetros de traslado y \sqrt{C} es la constante de normalización es importante mencionar que los patrones de intensidad Airy son muy sensibles a los cambios de los parámetros anteriores. Estos parámetros pueden elegirse para que sean el n -ésimo cero de la función de Airy a_n o el cero de la n -ésima derivada de la función de Airy a'_n [33].

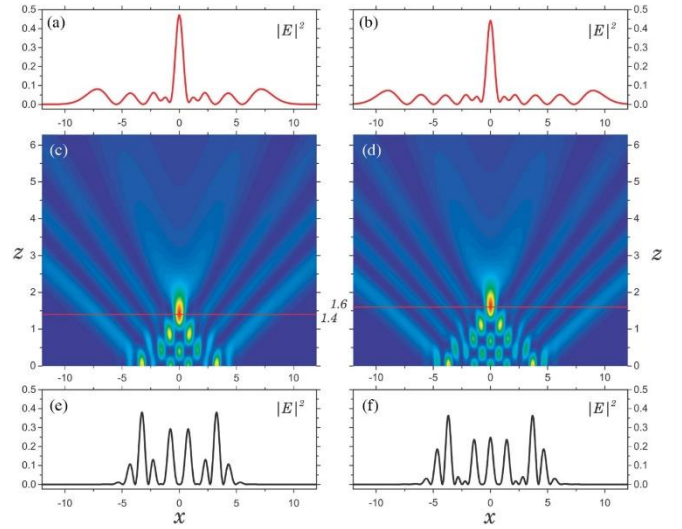


Fig. 5. Perfil teórico de la intensidad para un wavelet Airy dado en la ecuación (16) como función de (x, z) , para (c) $p = q = a_2 = -4.0870$ y (d) $p = q = a'_3 = -4.821$ Muestran que los perfiles de intensidad son muy similares para $z = \pi$. (e) y (f) son las intensidades iniciales y (a) y (b) la intensidad autoenfocada.

Para confirmar la validez de nuestra propagación analítica dada en la ecuación (13) nuevamente, consideramos dos propagaciones de haces propuestas en la referencia [26], donde se utilizó la integral de Huygens-Fresnel para propagar wavelets Airy.

En la Fig. 5(c), mostraremos en una gráfica de contornos la evolución del perfil de la intensidad de un wavelet Airy en el espacio libre, en función de la distancia z , el cual se calculó utilizando la ecuación (13), para un haz inicial $E(x, 0) = A(x)$, con $p = q = a_2 = -4.0879$, mostrado en la figura 5(e). Su correspondiente distribución intensidad se autoenfoca en $z = 1.4$, como se muestra en la figura 5(a).

De manera similar, en la Fig. 5(d), mostramos en una gráfica de contornos la evolución del perfil de la intensidad de un wavelet Airy en el espacio libre, en función de la distancia z , el cual se calculó utilizando la ecuación (13), para un haz inicial $E(x, 0) = Ai(x)$, con $p = q = a'_3 = -4.821$, mostrado en la figura 5(f), y su correspondiente distribución intensidad se autoenfoca en $z = 1.6$, como se muestra en la figura 5(b).

Las figuras 5(c) y 5(d) son muy similares: la diferencia está en las condiciones iniciales. Estas figuras con idénticas al as obtenidas utilizando la solución numérica de la integral de Huygens-Fresnel, reportada en la referencia [26].

Sin embargo, aquí se ha demostrado que es posible tener una ecuación analítica para la propagación libre de un haz arbitrario, como se muestra en la ecuación (13). Vale la pena mencionar que el método angular espectral de onda plana tipo Split-step, basado en la transformada rápida de Fourier (FFT) [34], se utilizó para confirmar la validez de nuestras simulaciones. Sin embargo, este método numérico requiere un gran intervalo muy amplio para la coordenada transversal ($80 \leq x \leq 80$), para evitar oscilaciones inducidas por la periodicidad de la FFT. Por el contrario, nuestra propagación analítica podría ser calculado para cualquier intervalo de la coordenada transversal x y longitudinal z sin los problemas de la periodicidad de las fronteras.

IV. CONCLUSIONES

Se ha mostrado analíticamente como una superposición apropiada de haces Airy produce un autoenfoco abrupto de las ondas en una dimensión. Además, algunas superposiciones pueden propagarse como campos cuasi-adifraccionales porque conservan su forma para grandes distancias de propagación, como se muestra en la figura 3. Por otro lado, hemos introducido expresiones analíticas simples para la propagación libre de cualquier campo inicial, basado en el estado de número del oscilador armónico cuántico, con este enfoque, creemos que hemos logrado resolver el problema de la auto-reconstrucción cuando el haz encuentra obstáculos. En particular, se aplicó a los haces Airy donde la expansión de su estado inicial en una base de estados de número, mostramos que la solución es fácil de aplicarse para explicar la auto-reparación de los haces Airy. De hecho, usando la ecuación (17) se obtienen expresiones analíticas para los paquetes de ondas propagados paraxialmente, sin la necesidad de utilizar la integral de Huygens-Fresnel.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Instituto Politécnico Nacional el apoyo bajo proyecto SIP:20210549. Agradecemos también al Dr.

Héctor Moya-Cessa del Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (INAOE) por su hospitalidad durante la estancia de investigación realizada en la elaboración de este proyecto.

REFERENCIAS

- [1] C. Finot and H. Rigneault, "Arago spot formation in the time domain," *J. Opt.* 21, 105504 (2019).
- [2] N. Kerker, R. Röpke, L. M. Steinert, A. Pooch, and A. Stibor, "Quantum decoherence by coulomb interaction," *New J. Phys.* 22, 063039 (2020).
- [3] S. Azzini, S. Mazzucchi, V. Moretti, D. Pastorello, and L. Pavesi, "Single-particle entanglement," *Adv. Quantum Technol.* 3, 2000014 (2020).
- [4] T. Eichelkraut, C. Vetter, A. Perez-Leija, H. Moya-Cessa, D. N. Christodoulides, and A. Szameit, "Coherent random walks in free space," *Optica* 1, 268271 (2014).
- [5] G. A. Siviloglou, J. Broky, A. Dogariu, and D. N. Christodoulides, "Observation of accelerating airy beams," *Phys. Rev. Lett.* 99, 213901 (2007).
- [6] C.-Y. Hwang, D. Choi, K.-Y. Kim, and B. Lee, "Dual airy beam," *Opt. Express* 18, 2350423516 (2010).
- [7] S. Yan, B. Yao, M. Lei, D. Dan, Y. Yang, and P. Gao, "Virtual source for an airy beam," *Opt. Lett.* 37, 47744776 (2012).
- [8] P. Vaveliuk, A. Lencina, J. A. Rodrigo, and O. M. Matos, "Symmetric airy beams," *Opt. Lett.* 39, 23702373 (2014).
- [9] P. Vaveliuk, A. Lencina, J. A. Rodrigo, and O. M. Matos, "Intensitysymmetric airy beams," *J. Opt. Soc. Am. A* 32, 443446 (2015).
- [10] Y. Kaganovsky and E. Heyman, "Wave analysis of airy beams," *Opt. Express* 18, 84408452 (2010).
- [11] D. G. Papazoglou, V. Y. Fedorov, and S. Tzortzakis, "Janus waves," *Opt. Lett.* 41, 46564659 (2016)
- [12] D. Mansour and D. G. Papazoglou, "Tailoring the focal region of abruptly autofocusing and autodefocusing ring-airy beams," *OSA Continuum* 1, 104115 (2018).
- [13] M. V. Berry and N. L. Balazs, "Nonspreading wave packets," *Am. J. Phys.* 47, 264267 (1979)
- [14] S. Vo, K. Fuerschbach, K. P. Thompson, M. A. Alonso, and J. P. Rolland, "Airy beams: a geometric optics perspective," *J. Opt. Soc. Am. A* 27, 25742582 (2010).
- [15] N. K. Efremidis, Z. Chen, M. Segev, and D. N. Christodoulides, "Airy beams and accelerating waves: an overview of recent advances," *Optica* 6, 686701 (2019).
- [16] S. Chávez-Cerda, U. Ruiz, V. Arrizón, and H. M. Moya-Cessa, "Generation of airy solitary-like wave beams by acceleration control in inhomogeneous media," *Opt. Express* 19, 1644816454 (2011).
- [17] D. G. Papazoglou, N. K. Efremidis, D. N. Christodoulides, and S. Tzortzakis, "Observation of abruptly autofocusing waves," *Opt. Lett.* 36, 18421844 (2011).
- [18] M. A. Bandres, I. Kaminer, M. Mills, B. Rodríguez-Lara, E. Greenfield, M. Segev, and D. N. Christodoulides, "Accelerating optical beams," *Opt. Photon. News* 24(6), 3037 (2013).
- [19] V. Arrizón, G. Mellado-Villaseor, D. Aguirre-Olivas, and H. M. Moya-Cessa, "Mathematical and diffractive modeling of self-healing," *Opt. Express* 26, 1221912229 (2018).
- [20] M. McLaren, T. Mhlanga, M. J. Padgett, F. S. Roux, and A. Forbes, "Single-particle entanglement," *Nat. Commun.* 5, 3248 (2014).
- [21] S. Li and J. Wang, "Accelerating optical beams," *Sci. Rep.* 7, 43233 (2017).
- [22] J. Broky, G. A. Siviloglou, A. Dogariu, and D. N. Christodoulides, "Self-healing properties of optical airy beams," *Opt. Express* 16, 1288012891 (2008).
- [23] J. D. Ring, J. Lindberg, A. Mourka, M. Mazilu, K. Dholakia, and M. R. Dennis, "Auto-focusing and self-healing of Pearcey beams," *Opt. Express* 20, 1895518966 (2012).

- [24] M. Anguiano-Morales, A. Martínez, M. D. Iturbe-Castillo, S. Chávez-Cerda, and N. Alcalá-Ochoa, "Self-healing property of a caustic optical beam," *Appl. Opt.* 46, 82848290 (2007).
- [25] Y. Qian, D. Li, and H. Mao, "Propagation dynamics of generalized and symmetric airy beams," *J. Opt. Soc. Am. A* 34, 314320 (2017).
- [26] A. Torre, "Propagating airy wavelet-related patterns," *J. Opt.* 17, 075604 (2015).
- [27] A. Zúñiga-Segundo, H. M. Moya-Cessa, and F. Soto-Eguibar, "Schrödinger like equation for wavelets," *AIP Adv.* 6, 015202 (2016).
- [28] J. Anaya-Contreras, A. Zúñiga-Segundo, F. Soto-Eguibar, V. Arrizón, A. Vidiella Barranco, and H. Moya-Cessa, "Squeeze operators in classical and quantum scenarios," *Proc. SPIE* 10771, 107710Y (2018).
- [29] H. P. Yuen, "Two-photon coherent states of the radiation field," *Phys. Rev. A* 13, 22262243 (1976).
- [30] C. M. Caves, "Quantum-mechanical noise in an interferometer," *Phys. Rev. D* 23, 16931708 (1981).
- [31] V. Namias, "The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics," *IMA J. Appl. Math.* 25, 241265 (1980).
- [32] J. Baumgartl, M. Mazilu, and K. Dholakia, "Optically mediated particle clearing using airy wavepackets," *Nat. Photonics* 2, 675678 (2008).
- [33] M. Abramovitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (1964).
- [34] A. Korpel, K. E. Lonngren, P. P. Banerjee, H. K. Sim, and M. R. Chatterjee, "Splitstep-type angular plane-wave spectrum method for the study of self-refractive effects in nonlinear wave propagation," *J. Opt. Soc. Am. B* 3, 885890 (1986).