Distribución De Planck y Determinación de las Constantes h y k

Víctor D. Granados García[1*], Juan Carlos Vega Pacheco[1], Carlos G. Pavía Miller[2,1]
[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional.
[2]Departamento de Ciencias Básicas. DCBI. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.

Resumen — **Investigamos la deducción de la distribución espectral de energía de Planck, con la fórmula de Boltzmann y un nuevo peso estadístico. Resolvemos como Planck creó la distribución de Bose-Einstein y revisamos la determinación de la constante de Boltzmann a, de la cual se determinan las constantes de Planck h y k de Boltzmann de datos experimentales.**

Palabras Clave – **distribución, Planck, constantes h y k**

Abstract -- **We investigate the derivation of the Planck spectral distribution of energy, with the Boltzmann formula and a new statistical weight. We solve how Planck created the Bose-Einstein distribution and review the determination of Boltzmann's constant a, from which Planck's constants h and Boltzmann's k are determined from experimental data.**

Keywords -- **distribution, Planck, constants h and k**

INTRODUCCIÓN

En 1901 Planck [1, 2, 3, 4, 5] usó la fórmula de Boltzmann para la entropía introduciendo un nuevo peso termodinámico diferente al de Boltzmann. Este sirvió para la descripción de la termodinámica de sistemas clásicos, mientras que el peso termodinámico de Planck genero una nueva distribución cuántica para bosones. Así, Planck inició lo que posteriormente se conocería como la distribución de Bose-Einstein [6, 7, 8, 9] para partículas de spin entero que no satisfacen el principio de exclusión de Pauli. Aunque el método seguido por Planck para calcular la entropía con la fórmula de Boltzmann imponiendo algunas condiciones le permitió obtener la distribución espectral de la radiación térmica de cuerpo negro, no fue lo más general [6, 7, 10]. La distribución espectral tiene la forma predicha por Wien y depende de dos constantes, la de Planck h y la llamada k de Boltzmann, aunque fue Planck quien la determinó e introdujo en mecánica estadística. Planck integró la distribución espectral de energía en todo el espectro de frecuencias $(0,\infty)$ para determinar la energía interna y obtener la relación de Stefan-Boltzmann [1, 2, 3, 4] $U = aVT^4$. Determinó así la constante a de Stefan-Boltzmann como función de las constantes universales h, k y la velocidad de la luz en el vacío c y otras constantes numéricas. Planck realizó el cambio de variable de la frecuencia υ a longitud de onda $\lambda = c/\upsilon$, lo que permitió determinar la distribución espectral de energía en función de λ, lo cual le posibilitó determinar las constantes c_1 y c_2 de la distribución de energía. Además, esto le facilitó probar la ley de desplazamiento de Wien para el máximo de la distribución espectral, $\lambda_m T = b$. Así Planck determinó las constantes a, c_2 y b teóricamente que juntó con los resultados experimentales [1, 2, 3, 4] obtenidos para estas constantes que llevaron a Planck a determinar los valores numéricos de las constantes universales h y k. Usando estas constantes junto con la velocidad de la luz en el vacío c y la constante gravitacional, Planck determinó las unidades que hoy llevan su nombre [1, 2, 12, 13]. El objetivo de este artículo es dar una revisión del método combinatorio de Planck para determinar la distribución espectral de energía del cuerpo negro y resaltar su contribución a la distribución cuántica de Bose-Einstein y explicar la determinación con bases experimentales de las constantes h y k, además de comparar con los resultados actuales. Comparamos también con los métodos actuales de la mecánica estadística.

***Becario: COFAA, EDD, SIP (20220061) IPN.**

DISTRIBUCIÓN ESPECTRAL DE ENERGÍA DE PLANCK

Mediante lo que Planck llamó una extrapolación afortunada de las leyes de Wien y de Rayleigh-Jeans [3, 4, 5], él obtuvo la distribución espectral de energía de la radiación térmica de cuerpo negro siguiente

$$U(\upsilon) = \frac{b}{e^{a/T} - 1}\,, \tag{1}$$

donde a, b son constantes. De la ley de Wien del desplazamiento [1, 2]

$$U(\upsilon) = \upsilon\, \phi\left(\upsilon/T\right)\,, \tag{2}$$

donde υ es la frecuencia de la radiación y ϕ una función de υ/T, Planck escribió la fórmula de la Ec. (1) en la forma

$$U = \frac{c\upsilon}{e^{a'\upsilon/T} - 1}\,, \tag{3}$$

donde c y a' son constantes. Esta fórmula fue modificada por Planck y escrita con la longitud de onda λ y la frecuencia respectivamente en las formas

$$U(\upsilon) = \frac{C\lambda^{-5}}{e^{c'/\lambda T} - 1}\,, \tag{4}$$

$$U(\upsilon) = \frac{A\upsilon^3}{e^{B\upsilon/T} - 1}\,, \tag{5}$$

donde C, c', A y B son constantes. Planck presentó estos resultados como un comentario extendido en la Sociedad Física Alemana el 19 de octubre de 1900 [14]. Rubens, quien escuchó el reporte, checó sus resultados experimentales, reportando completa coincidencia con las fórmulas de las

Ecs. (4) y (5), así como con los resultados experimentales de Lummer y Pringsheim [14]. No obstante, de la verificación experimental de las fórmulas (4) y (5), Planck reconoció que su derivación es termodinámica. Por lo tanto, Planck planteó una deducción fundamental a partir del método de Boltzmann de la combinatoria a partir de un peso termodinámico, aunque él no estuviera muy convencido del método combinatorio [3, 4]. Planck previo a esto introduce el cuanto de acción que llevaría al inicio de la teoría cuántica que se separa de la teoría clásica. Es conveniente citar a Planck referirse por primera vez a la constante h [14] "Ahora nosotros tenemos que considerar la distribución de energía U_N entre N resonadores de frecuencia υ. Si U_N fuera infinitamente divisible, la distribución pudiera ser realizada en un número infinito de formas. Sin embargo, consideramos y este es el punto cardinal de la computación total de U_N como compuesta de un número finito de partes iguales de partes discretas iguales y empleo para este fin la constante natural $h = 6.55\text{x}10^{-27}\ erg * seg$. Esta constante multiplicada por la frecuencia común υ de los resonadores da la energía ϵ en $ergs$, y dividiendo U_N por ϵ obtenemos el número P de elementos de energía los cuales están distribuidos entre los N resonadores". Así Planck introduce las ecuaciones siguientes

$$\epsilon = h\upsilon,\ U_N = NU = P\epsilon\ . \tag{6}$$

A continuación, Planck recurre a la combinatoria [1, 2] para obtener el número de complexiones o microestados para N y P muy grandes

$$R = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}\ , \tag{7}$$

que es la expresión usual que da el número de combinaciones en que pueden distribuirse P elementos indistinguibles en N cajas distinguibles [4]. Planck da una cita a un texto de probabilidad [1] para el cálculo de R, contrariamente a lo que se afirma en [4]. Luego utiliza la aproximación de Stirling [6, 7] para N y P muy grandes, $N! = N^N$ y $P! = P^P$, sustituidos en R de la Ec. (7) proporciona, con la fórmula de Boltzmann [15] $S = k \ln R$, la expresión para la entropía

$$S_N = k(N+P)\ln(N+P) - N\ln N - P\ln P\ . \tag{8}$$

Tomando las Ec. (6) en la Ec. (8) conducen a la expresión

$$S_N \simeq kN\{\left(1 + {}^{U}\!/_{\epsilon}\right)\ln\left(1 + {}^{U}\!/_{\epsilon}\right) - {}^{U}\!/_{\epsilon}\ln\left({}^{U}\!/_{\epsilon}\right)\ . \tag{9}$$

Finalmente, cuando utilizamos la relación termodinámica $1/T = dS/dU$, se llega a

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{h\upsilon}\ln\left(1 + {}^{h\upsilon}\!/_{U}\right)\ , \tag{10}$$

de la cual se obtiene

$$U_\upsilon = \frac{h\upsilon}{e^{h\upsilon/kT} - 1}\ . \tag{11}$$

Multiplicando ahora por el número de modos normales en la cavidad que considera los dos grados de polarización de los cuantos de radiación [1] finalmente se obtiene

$$u_\upsilon = \frac{U_\upsilon}{V} = \frac{8\pi h\upsilon^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\upsilon/kT} - 1}\ . \tag{12}$$

Esta distribución espectral de energía es consistente con la fórmula del desplazamiento de Wien [2, 3, 4] siguiente

$$u = \upsilon^3\phi\left({}^{T}\!/_{\upsilon}\right)\ . \tag{13}$$

Planck integró la densidad espectral de la Ec. (12) para obtener la energía interna $U(T,V)$ de la radiación térmica de cuerpo negro en la cavidad de volumen V

$$U(T,V) = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\upsilon^3 d\upsilon}{e^{h\upsilon/kT} - 1} =$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \left(e^{-h\upsilon/kT} + e^{-2h\upsilon/kT} + e^{-3h\upsilon/kT} + \cdots\right)\upsilon^3 d\upsilon\ , \tag{14}$$

integrando término por término Planck [2] obtiene

$$U(T,V) = \frac{48\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \alpha V\ , \tag{15}$$

donde $\alpha = \zeta(4)$ es la función Zeta de Riemann [7, 8, 9]

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \zeta(4) = 1.0823\ . \tag{16}$$

La relación (15) expresa la ley de Stefan-Boltzmann $U(T,V) = aVT^4$ y la constante de esta ley está dada por

$$a = 48\,{}^{\pi\alpha k^4}\!/_{c^3 h^3}\ . \tag{17}$$

Como experimentalmente se estudia $u(\lambda)$, se usa la relación $\upsilon = c/\lambda$ en la Ec. (12), de la cual Planck obtiene así

$$u(\lambda) = \frac{c^2 h}{\lambda^5}\frac{1}{e^{ch/k\lambda T} - 1} = \frac{c_1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1}\ . \tag{18}$$

Planck introduce así las constantes de radiación $c_1 = c^2 h$ y $c_2 = ch/k$. Planck nos informa que el resultado experimental [2] de la última constante está dado por

$$c_2 = {}^{ch}\!/_{k} = 1.436\ c\,m\,K\ . \tag{19}$$

Por último, Planck considera la ley del desplazamiento de Wien [2, 3, 7] para la longitud de onda λ_m para el máximo de la Ec. (18) de $u(\lambda)$

$$\lambda_m T = b = constante\ . \tag{20}$$

Así que, al elevar la temperatura, λ_m es desplazada en la dirección de longitudes de onda más corta. De la Ec. (18), de la condición para un máximo $du(\lambda)/d\lambda = 0$ y poniendo como abreviación

$$\frac{ch}{k\lambda_m T} = \beta\ , \tag{21}$$

se llega a la ecuación transcendental

$$e^{-\beta} + \frac{\beta}{5} - 1 = 0\ . \tag{22}$$

Esta ecuación se resuelve gráficamente [7] y Planck [2] reporta el siguiente resultado

$$\beta = 4.9651\ , \tag{23}$$

y, por lo tanto, de la Ec. (19) $\lambda_m T = ch/k\beta = b$, de acuerdo con la Ec. (20) de la ley de Wien. Para determinar el valor numérico de las constantes naturales h y k, Planck conoció los valores experimentales de las constantes c_2 de la Ec. (19) y de la Ec. (17) para la constante σ de Stefan-Boltzmann [2]. El resultado experimental usado por Planck fue con la relación $\sigma = ac/4 = 5.54\text{x}10^{-5} erg\, cm^{-2}\, s^{-1}\, K^{-4}$ y de $c = 3\text{x}10^{10}\, cm/s$, $a = 4\sigma/c$, de la cual obtenemos

$$a = 48\frac{\pi\alpha k^4}{h^3c^3} = 7.3866\ \frac{erg}{cm^3K^4}\,. \qquad (24)$$

Así de las constantes c_2 y a de las Ec. (19) y (24) y sus valores experimentales numéricos, Planck determina los valores numéricos de las constantes universales h y k, Planck obtiene

$$h = \frac{ac_2{}^4}{48\pi\alpha c} = 6.415\text{x}10^{-27}\ erg\ s\ , \qquad (25)$$

$$k = \frac{ac_2{}^3}{48\pi\alpha} = 1.34\text{x}10^{-16} erg\ K^{-1}\ . \qquad (26)$$

Planck [1] había reportado previamente los siguientes valores $h = 6.55\text{x}10^{-27}\, erg\ s$ y $k = 1.346\text{x}10^{-16}\, erg/K$. También relacionó [2] la constante de los gases ideales R y la constante k que por razones históricas se nombra de Boltzmann, que él no determinó sino Planck, el número de Avogadro $N_a = R/k = 6.2\text{x}10^{23}$, así como el número de Loch y la carga del electrón e mediante la relación de Faraday que dio un resultado más exacto que el de Thomson [2]. Planck pudo así escribir la ecuación de un gas ideal como $PV = NkT$, donde N es el número de partículas del gas. Einstein en 1905 calculó también N_a [16] mediante la ley de radiación de Rayleigh-Jeans y se ha afirmado [16] que Planck con las constantes universales h, k, c y la de la gravitación $f = 6.685\text{x}10^{-8}\, cm^3/gr\, s^2$, determinó las siguientes Unidades Naturales [2] que hoy se conocen como unidades de Planck [12, 13]

$$\left(\frac{fh}{c^3}\right)^{1/2} = 3.99\text{x}10^{-33}cm,\quad \left(\frac{ch}{f}\right)^{1/2} = 5.37\text{x}10^{-5}gr\ ,$$

$$\left(\frac{fh}{c^5}\right)^{1/2} = 1.33\text{x}10^{-43}s,\quad \frac{1}{k}\left(\frac{c^5h}{f}\right)^{1/2} = 3.60\text{x}10^{33}K\ .$$

Con los valores experimentales de $c_2 = 1.439\, cm\, K$ y con $a = 7.5\text{x}10^{-15}\ erg/cm\, K$ [12, 13] y $c = 2.989\text{x}10^{10}\, cm$ se obtienen los valores actuales de h y k. En 1926, G. N. Lewis nombró a los cuantos de energía de radiación $e = h\upsilon$ fotones, pero erróneamente concluyo que tenían masa y que su número se conserva [14]. Posteriormente se probó [19] que los fotones no tienen masa, que tienen spin 1, que no se conserva su número N y que su potencial químico es $\mu = 0$ [6, 7, 8, 9, 10].

PLANCK COMO CREADOR DE LA DISTRIBUCIÓN CUÁNTICA

En 1924, Bose derivó la ley de radiación de Planck [17] introduciendo el concepto de indistinguibilidad de los cuantos de radiación o fotones. Boltzmann sugirió [4] que las moléculas en algunos casos tendrían energías $0, \epsilon, 2\epsilon, \ldots$. Planck probó [2], adelantándose a la regla de Wilson-Sam, que los niveles posibles de energía de un oscilador armónico cuantizado son $0, \epsilon, 2\epsilon, \ldots, n\epsilon$, con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y $\epsilon = h\upsilon$. Bose [17] utilizó esto para obtener una estadística de los niveles de energía con el método de Boltzmann, así el valor medio de n y ϵ son

$$\langle n\rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n\epsilon/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon}} = \frac{1}{e^{\epsilon/kT}-1} = \frac{1}{e^{h\upsilon/kT}-1}\,, \qquad (27)$$

$$\langle \epsilon\rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon e^{-n\epsilon/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon/kT}} = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT}-1} = \frac{h\upsilon}{e^{h\upsilon/kT}-1}\,, \qquad (28)$$

que es la ya obtenida por Planck [1, 2]. Además, estos métodos de promedio ya habían sido usados por de Broglie en 1922 [18]. Bose usó la relación de Einstein $\epsilon = cp = h\upsilon$ para calcular el número de modos normales. Pero, aunque este fue un paso importante de Bose no creó una nueva estadística cuántica [5]. Por su parte, Einstein trató el caso de los cuantos de radiación con $\epsilon = h\upsilon$ como indistinguibles. Usó el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange sin tomar el número N de cuantos de energía constante, con el peso termodinámico de Planck de la Ec. (7) en la forma [6, 7, 10] siguiente, en que se consideran celdas g_i con N_i partículas

$$W_i = \frac{(g_i+N_i-1)!}{(g_i-1)!\,N_i!}\,. \qquad (29)$$

Con el método usual, Einstein obtuvo

$$N_i = \frac{g_i}{e^{\beta\epsilon}-1}\,, \qquad (30)$$

con $\beta = 1/kT$ y $\epsilon = h\upsilon$. Entonces tenemos que

$$U_\upsilon d\upsilon = N_i h\upsilon\ d\upsilon = \frac{8\pi V}{c^3}\frac{\upsilon^3\ d\upsilon}{e^{h\upsilon/kT}-1}\,, \qquad (31)$$

en la que se identificó g_i con el número de modos normales. Aunque se ha modificado el peso termodinámico de Planck, este sigue teniendo su forma original. El número total de cuantos de energía no fue tratado por Bose y Einstein, pero de la Ec. (30) con $\omega = 2\pi\upsilon$ puede calcularse [8, 9] como

$$N = \frac{V}{\pi^2c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^2\ d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1} = \frac{V(kT)^3}{\pi^2c^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^3\ dx}{e^x-1}\,,$$

$$N = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 V = 0.244(2\pi)^3 V\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3\,. \qquad (32)$$

La constante $c_2 = ch/k = 1.436\, cm\, K$ de la Ec. (19) la escribimos como

$$N = 9.911\ VT^3\ cm^{-3}K^{-3}\ . \qquad (33)$$

Si tenemos en cuenta [6, 7] la ecuación para la radiación de cuerpo negro $PV = aVT^4/3$ y tomamos VT^3 de la Ec. (31), obtenemos la ecuación de estado del gas de cuantos de energía siguiente

$$PV = \frac{NaT}{3(9.911)}\ cm^{-3}K^{-3} = 0.252\text{x}10^{-15}NT\ , \qquad (34)$$

en unidades cgs. Pero hay que tomar en cuenta que en esta ecuación de estado $N = N(V, T)$ de acuerdo con la Ec. (30), es una ecuación de cuantos de energía. Por último, es conveniente aclarar que los métodos de Bose-Einstein no son los más generales y completos. Como sabemos con el método de la distribución gran canónica de Gibbs [8, 9] y el gran potencial, pueden obtenerse las variables termodinámicas de un sistema cuántico que obedece la estadística de Planck, Bose y Einstein, en función del potencial químico. Además, sin considerar la indistinguibilidad de las partículas.

CONCLUSIONES

En su tratamiento de la radiación térmica de cuerpo negro, Planck introdujo un nuevo tipo de distribución cuántica, precediendo a la de Bose-Einstein. Introdujo un nuevo peso estadístico diferente al de Boltzmann, el cual le permitió a Einstein generalizarlo para crear la estadística de Bose-Einstein. Planck consideró la radiación térmica como un gas de cuantos de energía, que Einstein retomó posteriormente para introducir el gas de fotones. Planck determinó los valores numéricos de las constantes h, k, R mediante coeficientes que aparecen en la distribución térmica de cuerpo negro, que se midieron experimentalmente.

REFERENCIAS

[1] M. Planck, On the Law of Distribution of Energy Spectrum. *Ann. der Physik* **4** (1901) 553. Reproducido en: Great Experiments in Physics. M. H. Shamos. Dover reprint. New York. 1987.

[2] M. Planck, The Theory of Heat Radiation. Dover reprint. New York. 1959.

[3] H. Kangro, History of Planck's Radiation Law. Taylor and Francis. London. 1976.

[4] T. S. Kuhn, La Teoría del Cuerpo Negro y la Discontinuidad Cuántica 1894-1912. Alianza Editorial. Madrid. 1980.

[5] L. García-Colín Scherer, La Naturaleza Estadística de la Teoría de los Cuantos. El Colegio Nacional. México. 2004.

[6] F. W. Sears, Introducción a la Termodinámica, Teoría Cinética de los Gases y Mecánica Estadística. Reverté. Barcelona. 1959.

[7] M. Zemansky, Calor y Termodinámica. Aguilar. Madrid. 1972.

[8] L. Landau y M. Lifshitz, Statistical Physics. Pergamon Press. New York. 1959.

[9] W. Greiner, L. Neise y H. Stöcker, Thermodynamics and Statistical Mechanics. Springer. New York. 1995.

[10] F. J. Lee, F. W. Sears. y L. D. Turcotte, Statistical Thermodynamics. Addison-Wesley. Reading Mass. 1973.

[11] J. Barrow, Las Constantes de la Naturaleza. Crítica. Barcelona.

[12] H. Fritzsch, The Fundamental Constants. World Scientific. Singapur. 2009.

[13] O. Spirinov, Constantes Físicas Universales. MIR. Moscú. 1986.

[14] M. Jammer, The Conceptual Development of Quantum Mechanics. Mc Graw-Hill. New York. 1966.

[15] L. Boltzmann, *Lectures on Gas Theory*. University of California Press. Berckley. 1964.

[16] A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases», Preussische Akademie der Wissenschaften, *Phys.-math. Klasse, Sitzungsberichte*, 1924, pp. 261-267. Berliner Beritcht. 1924. Páginas 261-267. Número de abril de 1924.

[17] R. K. Pathria, Statistical Mechanics. Pergamon Press. Oxford. 1972.

[18] E. Whittaker, The History of the Theories of Aether and Electricity. Dover. New York. 1989.

[19] K.Huang K, Statistical Mechanics. John Wiley. New York. 1987.