Spin, Helicidad y Polarización del Fotón

Víctor D. Granados García[1*], Carlos G. Pavía Miller[2,1], Roberto D. Mota Esteves[3,**]
[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional.
[2]Departamento de Ciencias Básicas. DCBI. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.
[3]ESIME Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, México D.F. México

Resumen — **Mediante las soluciones de onda plana de las ecuaciones de Maxwell en el vacío y con los vectores de Sandoval Vallarta $\boldsymbol{V_{\pm}=E\pm icB}$ obtenemos las ecuaciones de autovalores de estos vectores. Con la representación adjunta del grupo $\boldsymbol{SO(3)}$ dada por el tensor antisimétrico en los productos vectoriales, determinamos las autofunciones de spin, helicidad y polarización en el eje *z*. Luego las obtenemos en cualquier dirección con la base ortonormal de las coordenadas esféricas en la representación de helicidad.**

Palabras Clave – **spin, helicidad, polarización**

Abstract — **Using the plane wave solutions of Maxwell's equations in a vacuum and with the Sandoval Vallarta vectors $\boldsymbol{V_{\pm}=E\pm icB}$ we obtain the eigenvalue equations of these vectors. With the adjoint representation of the $\boldsymbol{SO(3)}$ group given by the antisymmetric tensor on the vector products, we determine the eigenfunctions of spin, helicity, and polarization on the z-axis. We then obtain them in any direction with the orthonormal basis of the spherical coordinates in the helicity representation.**

Keywords — **spin, helicity, polarization**

INTRODUCCIÓN

Maxwell sintetizó los conocimientos de electrodinámica del siglo XIX en sus ecuaciones del campo electromagnético y en la ecuación de onda que satisfacen [1]. Sandoval-Vallarta [2] escribió por primera vez las ecuaciones de Maxwell en el vacío con el vector $\boldsymbol{V}_{\pm}=\boldsymbol{E}\pm ic\boldsymbol{B}$ en forma matricial de Dirac. Las matrices de Dirac de 4×4 fueron tres ya que consideró que la masa del fotón es nula. Determina las componentes del tensor de energía-momento, pero no el spin, helicidad y polarización del fotón. Posteriormente Majorana estudió las ecuaciones de Maxwell con matrices de 3×3 del grupo $SO(3)$ con un trabajo inconcluso por su desaparición [3,4]. En la literatura de la Mecánica Cuántica Relativista [5,6] se estudian las ecuaciones de Maxwell, pero sin determinar el spin, helicidad y polarización del fotón. Good en 1957 escribió las ecuaciones de Maxwell en el vacío y sus soluciones de onda plana cambiando los productos vectoriales por matrices de la representación del grupo $SO(3)$. Así determinó la ecuación cuántica del fotón con masa nula y spin 1 [7,8]. Muirhead revisó la teoría de Good e identificó las representaciones de autovalores con el operador de helicidad [9]. Muirhead hizo la identificación del operador de helicidad con el de Pauli-Liubanski en el límite ultrarelativista [9,10,11] cuando la masa de la partícula se anula. Wigner probó [12] que en este caso el spin de la partícula $\boldsymbol{s}$ es paralelo al momento lineal de la misma y además es relativistamente invariante. El objetivo de este artículo es primero tratar las soluciones de onda armónica con el método de Good y Muirhead [8,9] como caso particular en el que el momento lineal está en la dirección z. Identificamos los dos estados de helicidad como estados de quiralidad [10,13,14] y estos estados los identificamos con estados de polarización de la luz o del fotón [15,16,17]. En este caso encontramos que los estados de helicidad de mano derecha son estados de polarización circular derecha y los de helicidad de mano izquierda son estados de polarización circular izquierda [18,19]. Posteriormente con la base ortonormal de las coordenadas esféricas [20] tomamos el vector radial en la dirección de propagación y los otros dos en la dirección de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Obtenemos los autovectores de helicidad y polarización en función de los ángulos θ y ϕ. Obtenemos así, pero por otro método los estados de helicidad [21,22,23].

***Becario: COFAA, EDD, SIP (20220061) IPN.**
****Becario: COFAA, EDI, SIP (20220061) IPN**

SOLUCIONES DE ONDA ARMÓNICA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Consideramos las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético en el vacío

$$\nabla * \boldsymbol{E} = 0,\ \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$
$$\nabla * \boldsymbol{B} = 0,\ \nabla\times\boldsymbol{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad (1)$$

donde c es la velocidad de la luz dada por $c^2=1/\mathcal{E}_0\mu_0$. Con ambos campos se prueba fácilmente que satisfacen la ecuación de onda

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\nabla^2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0},\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}-\nabla^2\boldsymbol{B}=0\,. \qquad (2)$$

Estas ecuaciones tienen las siguientes soluciones de onda plana armónica [8,9,24]

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E_o}e^{i(\boldsymbol{k}*\boldsymbol{r}-\omega t)},\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B_o}e^{i(\boldsymbol{k}*\boldsymbol{r}-\omega t)}\,, \qquad (3)$$

donde $\boldsymbol{E_o}$ y $\boldsymbol{B_o}$ son las amplitudes de las ondas que no dependen del espacio-tiempo $(\boldsymbol{r},t)$. $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}k$ es el vector de propagación de magnitud $k={}^{2\pi}/_{\lambda}$, $\boldsymbol{n}$ indica la dirección de propagación $|\boldsymbol{n}|=1$ y $\omega/k=c$. La cantidad $\boldsymbol{k}*\boldsymbol{r}-\omega t=-k^{\mu}x_{\mu}=-(\omega/c\,,\boldsymbol{k})(ct,-\boldsymbol{r})$ que es un escalar invariante de Lorentz. De la solución de onda armónica de la Ec. (3)

sustituidas en las ecuaciones de Maxwell, Ec. (1), se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\nabla * \boldsymbol{E} = \boldsymbol{k} * \boldsymbol{E} = 0, \quad \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B},$$

$$\nabla * \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k} * \boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B} = -\frac{\boldsymbol{E}}{c}. \tag{4}$$

De las dos primeras ecuaciones de Ec. (4) se sigue que los vectores del campo electromagnético $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares al vector de propagación $\boldsymbol{k}$ y de las ecuaciones tercera y cuarta, que los vectores $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ forman una base ortogonal derecha y las magnitudes del campo electromagnético E y B satisfacen $E = cB$. Entonces podemos escribir en la forma

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{n_1} E, \ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{n_2} B \ , \tag{5}$$

donde los vectores unitarios $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}_1$ y $\boldsymbol{n}_2$ forman una base ortonormal derecha

$$\mathbf{n} \times \boldsymbol{n_1} = \boldsymbol{n}_2, \ \boldsymbol{n_1} \times \boldsymbol{n_2} = \boldsymbol{n}, \ \boldsymbol{n_2} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n_1} \ . \tag{6}$$

Introducimos ahora los vectores complejos de Sandoval-Vallarta

$$\boldsymbol{V}_+ = \boldsymbol{E} + ic\boldsymbol{B}, \ \boldsymbol{V}_- = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{icB} = \boldsymbol{V_+}^* \ , \tag{7}$$

$$\boldsymbol{V}_\pm = (\boldsymbol{E} \pm ic\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{n_1} \pm i\boldsymbol{n_2})\boldsymbol{E} \ , \tag{8}$$

donde usamos las ecuaciones de la Ec. (5). Con los vectores $\boldsymbol{V}_\pm$ las ecuaciones de Maxwell de la Ec. (1) se escriben como:

$$\nabla * \boldsymbol{V}_\pm = \nabla * (\boldsymbol{E} \pm ic\boldsymbol{B}) = 0 \ , \tag{9}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{V}_+ = \nabla \times (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{icB}) = \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \frac{i}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{i}{c}\frac{\partial \boldsymbol{V}_+}{\partial t} \ , \tag{10}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{V}_- = -\frac{i}{c}\frac{\partial \boldsymbol{V}_-}{\partial t} \ . \tag{11}$$

Las Ec. (9) y (10) fueron escritas por primera vez en otro contexto por Sandoval-Vallarta [2]. Las Ec. (9) y (10) junto con las Ec. (5-7) nos permiten escribir las primeras en la forma

$$i\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{n_1} + i\boldsymbol{n_2})E = -\frac{i}{c} i\omega(\boldsymbol{n}_1 + i\boldsymbol{n}_2)E \ , \tag{12}$$

cancelando el escalar E tenemos

$$i\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{n_1} + i\boldsymbol{n_2}) = \frac{\omega}{c}(\boldsymbol{n}_1 + i\boldsymbol{n}_2) \ . \tag{13}$$

De igual manera la Ec. (11) nos proporciona la ecuación

$$i\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{n_1} - i\boldsymbol{n_2}) = -\frac{\omega}{c}(\boldsymbol{n}_1 - i\boldsymbol{n}_2) \ . \tag{14}$$

Ahora introducimos las relaciones cuánticas de la dualidad onda-partícula de Planck y Einstein $\hbar\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}$ y $E = \hbar\omega$, en las soluciones de las ecuaciones en Ec. (3) de onda plana armónica para obtener

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E_o} e^{i(\boldsymbol{p}*\boldsymbol{r}-Et)/\hbar}, \ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B_o} e^{i(\boldsymbol{p}*\boldsymbol{r}-Et)/\hbar} \ . \tag{15}$$

Al sustituir las ondas planas cuánticas en las ecuaciones de onda del campo electromagnético nos dan

$$\frac{1}{\hbar^2}\left(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)E = \frac{1}{\hbar^2}\left(\boldsymbol{p}^2 - \frac{\boldsymbol{E}^2}{\boldsymbol{c}^2}\right)E = 0 \ .$$

De $E^2 = c^2p^2$ se tiene $E = cp = c|p|$, esta es la ecuación de Einstein para partículas de masa nula, es decir, los fotones. Otra ecuación idéntica se satisface para el campo $\boldsymbol{B}$. Multiplicando por $\hbar$ ambos lados de las Ec. (13) y (14) teniendo en cuenta las ecuaciones de Planck-Einstein $\hbar\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}$ y $E = \hbar\omega = c|p|$, estas ecuaciones se transforman en las siguientes

$$i\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \times (\boldsymbol{n_1} + i\boldsymbol{n}_2) = (\boldsymbol{n_1} + i\boldsymbol{n}_2) \ , \tag{16}$$

$$i\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \times (\boldsymbol{n}_1 - i\boldsymbol{n}_2) = -(\boldsymbol{n_1} - i\boldsymbol{n}_2) \ . \tag{17}$$

Estas dos ecuaciones Ec. (16) y (17) por su deducción son cuánticas y en lugar de expresar la propagación de un frente de onda, representa un flujo de fotones. Estas ecuaciones son dos ecuaciones de autovalores para los vectores $\boldsymbol{n}_\pm = (\boldsymbol{n}_1 \pm i\boldsymbol{n}_2)$ y con autovalores 1 y -1 respectivamente.

ESTADOS DE SPIN, HELICIDAD Y POLARIZACIÓN DEL FOTÓN

Sabemos que el producto vectorial de dos vectores se puede escribir por una transformación lineal de una matriz antisimétrica de 3×3 con entradas del primer vector y que actúa sobre el segundo [25]. En efecto con la representación adjunta de la algebra de Lie del grupo $SO(3)$ generada por el tensor antisimétrico ϵ_{jkl} con j, k y l con suma sobre índices repetidos [26] tenemos

$$i\epsilon_{jkl}\frac{p_k}{|\boldsymbol{p}|}(\boldsymbol{n}_1 \pm i\boldsymbol{n}_2)_l = \pm(\boldsymbol{n}_1 \pm i\boldsymbol{n}_2)_j \ . \tag{18}$$

Así las matrices de la representación adjunta son

$$(S_k)_{jl} = i\epsilon_{jkl} \ , \tag{19}$$

donde k indica las tres matrices de 3×3 cuyas entradas las dan los índices i y j [26]. Explícitamente estas matrices son

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19'}$$

Estas matrices corresponden a los generadores infinitesimales del grupo $SO(3)$ multiplicados por i [27], que cumplen las siguientes relaciones

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k, \qquad [S_i, S^2] = 0,$$

$$S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2 = 1(1+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S^2 \ . \tag{20}$$

La matriz S^2 es el operador de Casimir del grupo y su autovalor es $S(S+1)$ donde $S = 1/2, 1, 3/2, \ldots$ etc. En nuestro caso $S = 1$ es el momento angular intrínseco o spin del fotón.

Con estas matrices las ecuaciones en Ec. (18) podemos escribirlas con suma sobre índices repetidos como

$$\left(\frac{\boldsymbol{S}*\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}_o|}\right)_{jl}(\boldsymbol{n}_1 + i\boldsymbol{n}_2)_l = (\boldsymbol{n}_1 + i\boldsymbol{n}_2)_j \,, \qquad (21)$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{S}*\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}_o|}\right)_{jl}(\boldsymbol{n}_1 - i\boldsymbol{n}_2)_l = -(\boldsymbol{n}_1 - i\boldsymbol{n}_2)_j \,. \qquad (22)$$

Identificamos el operador $\boldsymbol{S} * \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}_o|$ con el operador de helicidad o quiralidad de la partícula del fotón de masa cero [10,11,13] y las Ec. (21) y (22) son las ecuaciones de autovalores y autovectores del operador de helicidad y quiralidad. La Ec. (21) para el autovector $(\boldsymbol{n}_1 + i\boldsymbol{n}_2)$ tiene helicidad 1 y el autovector $(\boldsymbol{n}_1 - i\boldsymbol{n}_2)$, helicidad -1. Como resolver las Ec. (21) y (22) y determinar sus autovectores no es simple para cualquier dirección del momento $\boldsymbol{p}$, se resuelven para el caso particular donde se tiene $p_x = p_y = 0$ y $p_z = p$, tenemos entonces

$$\frac{\boldsymbol{S}*\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

donde los signos 1 y -1 de los autovalores, corresponden a los signos + y – del autovector. Así tenemos la correspondencia de los autovalores de helicidad o quiralidad $\lambda = \pm 1$ con los vectores de polarización.

$$\lambda = 1, \text{helicidad de mano derecha } =$$

$$= \text{ polarización circular derecha} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

$$\lambda = -1, \text{helicidad de mano izquierda } =$$

$$= \text{ polarización circular izquierda} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad (25)$$

donde los vectores columna de dos componentes son vectores de Jones de la polarización indicada [15,16]. Para un spin s existen $2s + 1$ estados de helicidad $\lambda = -s, -s + 1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, s$ [23] así para spin 1 del fotón $\lambda = 0, \pm 1$, pero el estado con $\lambda = 0$ no existe por la transversalidad del campo electromagnético. Para determinar los estados de helicidad, quiralidad y polarización en el caso general, introducimos los vectores ortonormales inducidos por las coordenadas esféricas $\boldsymbol{e_r}$, $\boldsymbol{e_\theta}$ y $\boldsymbol{e_\phi}$ [20]. Estos vectores son los siguientes

$$\boldsymbol{e_r} = sin\theta cos\phi\hat{\boldsymbol{\imath}} + sin\theta sin\phi\hat{\boldsymbol{\jmath}} + cos\theta\hat{\boldsymbol{k}} \,, \qquad (26)$$

$$\boldsymbol{e_r} = sin\theta cos\phi\hat{\boldsymbol{\imath}} + sin\theta sin\phi\hat{\boldsymbol{\jmath}} + cos\theta\hat{\boldsymbol{k}} \,, \qquad (27)$$

$$\boldsymbol{e_\phi} = -sin\phi\hat{\boldsymbol{\imath}} + cos\phi\hat{\boldsymbol{\jmath}} \,. \qquad (28)$$

Las relaciones de ortonormalidad son

$$\boldsymbol{e_r} \times \boldsymbol{e_\theta} = \boldsymbol{e_\phi},\ \boldsymbol{e_\theta} \times \boldsymbol{e_\phi} = \boldsymbol{e_r},\ \boldsymbol{e_\phi} \times \boldsymbol{e_r} = \boldsymbol{e_\theta} \,. \qquad (29)$$

En las Ec. (16) y (17) escribimos $\boldsymbol{p} = |p_o|\boldsymbol{e_r}$ e identificamos los vectores $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{e_\theta}$, $\boldsymbol{n_2} = \boldsymbol{e_\phi}$ y se prueba sin dificultad que se satisfacen las ecuaciones generales de autovectores y autovalores de helicidad

$$i\boldsymbol{e_r} \times (\boldsymbol{e_\theta} \pm i\boldsymbol{e_\phi}) = \pm(\boldsymbol{e_\theta} \pm i\boldsymbol{e_\phi}) \,. \qquad (30)$$

De acuerdo con las ecuaciones en Ec. (27) y (28) los autovectores en la Ec. (30) toman la forma de vector columna siguiente

$$\boldsymbol{e_\theta} \pm i\boldsymbol{e_\phi} = \begin{pmatrix} cos\theta cos\phi - isin\phi \\ cos\theta sin\phi + icos\phi \\ -sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Las ecuaciones en Ec. (30) mediante las matrices de Ec. (19) se escriben entonces como

$$i\begin{pmatrix} 0 & -cos\theta & sin\theta sin\phi \\ cos\theta & 0 & -sin\theta cos\phi \\ sin\theta sin\phi & sin\theta cos\phi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\theta cos\phi - isin\phi \\ cos\theta sin\phi + icos\phi \\ -sin\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \pm\begin{pmatrix} cos\theta cos\phi - isin\phi \\ cos\theta sin\phi + icos\phi \\ -sin\theta \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

CONCLUSIONES

Con las soluciones de onda plana de las ecuaciones de Maxwell en el vacío y con los vectores de Sandoval Vallarta se obtuvieron las ecuaciones de autovalores de estos vectores y con la representación adjunta del grupo $SO(3)$ se determinó las autofunciones de spin, helicidad y polarización en el eje *z*. Por último, se encontraron para cualquier dirección con la base ortonormal de las coordenadas esféricas en la representación de helicidad.

REFERENCIAS

[1] J. C. Maxwell, A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **155** (1865) 459-512.

[2] M. Sandoval Vallarta, Note on the Statistical Interpretation of Maxwell's Equations, Manuel Sandoval Vallarta. Obra científica, A Mondragón y D Barnes. UNAM-INEN. México, 1978.

[3] E. Majorana, Teoria Relativistica di Paeticelle Con Momento Intrisico Arbitrario, *il Nuovo Cimento* **9** (1932) 335-344.

[4] W. I. Fushchich y A. G. Nikitin, Symmetries of Maxwell's Equations (Mathematics and its Applications, 8), D Reidel Publishing Company. Dordrecht Holland. 1987.

[5] J. J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley. Reading, Mass., United States 1967.

[6] J. D. Bjorken e S. D. Drell - Relativistic Quantum Mechanics, Mc Graw-Hill Book Company. New York, 1964.

[7] R. H. Good Jr., Particle Aspect of the Electromagnetic Field Equations, *Phys. Rev*. **105** (1957) 1914-1918.

[8] R. H. Good y T. J. Nelson, Classical theory of electric and magnetic fields. Academic Press, New York, 1971.

[9] H. Muirhead, The special theory of relativity, The Macmillan Press, London, 1973.

[10] L. H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[11] S. S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Harper & Row. New York, 1966.

[12] E. P. Wigner, Relativistic Invariance and Quantum Phenomena, *Rev. Mod. Phys*. **29** (1957), 255-258.
[13] C. Itzykson y J. B. Zuber, Quantum Field Theory, Dover Publications Inc., New York, 2005
[14] J. J. Sakurai, Invariance Principles and Elementary Particles, Princeton University Press. Princeton, 1964.
[15] E. Hecht, Optics, Addison-Wesley Pub., Reading, Mass. 1987.
[16] R. D. Guenther, Modern Optics, John Wiley & Sons, New York, 1990.
[17] J. W. Simons, M. J. Gutmann, States, Waves and Photons: a Modern Introduction to Light, Addison-Wesley Pub., Reading Mass. 1970.
[18] M. E. Rose, Elementary Theory of Angular Momentum, Dover Publications Inc., New York, 2011.
[19] M. E. Rose, polarization phenomena in beta and gamma Emission. En Lectures in Theoretical Physics Editor K. W. Ford, Brandeis University Summer Institute Vol 2. W. A. Benjamin, Inc. 1962.
[20] M. R. Spiegel, Análisis Vectorial, McGraw Hill, Bogotá, 1969.
[21] M. Jacob, Angular distributions in strange particles two body-decays, *il Nuovo Cimento* **9** (1958) 826-833.
[22] M. Jacob y G.C. Wick, On the general theory of collisions for particles with spin, *Ann. Phys*. **7** (1959) 404-428.
[23] K. Gottfried, Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1966.
[24] M. A. Heald y J. B. Marion, Classical Electromagnetic Radiation, Dover Publications Inc., 2012.
[25] J. L. Powell y B Crasemann, Quantum Mechanics, Addison-Wesley Pub., Reading Mass. 1961.
[26] B. N. Shapukov, Grupos y Algebras de Lie, Editorial URSS. Moscú, 2001.
[27] M. Hamermesh, Group Theory and Its Application to Physical Problems, Addison-Wesley. Reading Mass., 1962.