

Ciclo de Arrot como modelo de un sistema termodinámico con calor residual. Potencia eficiente y función ecológica

Diego A. Celaya Hernández¹, Delfino Ladino Luna², Ricardo T. Paez Hernández³

^{1,2,3}AFPI, Ciencias Básicas, Universidad autónoma metropolitana-A, Cd. de México, México

Teléfono (55) 53189504 E-mail: ¹al2153034641@azc.uam.mx, ²dll@azc.uam.mx, ³phrt@azc.uam.mx

Resumen — En el proceso de transferencia de calor, y su transformación en energía mecánica para producir trabajo, aparece el llamado “calor residual”, que generalmente es utilizado para sobrecalentar o precalentar una substancia de trabajo en el sistema, pero podría ser utilizado también para producir trabajo extra. La representación de cómo utilizar este calor residual no es simple y no aparece generalmente en la termodinámica clásica de equilibrio. Una manera de estudiar esta situación es aprovechar el llamado ciclo nulo propuesto por Arrot. Así, en el presente manuscrito realizamos un breve estudio del ciclo nulo de Arrot, desde el punto de vista de la termodinámica de tiempos finitos, considerando las regiones de existencia física de las funciones objetivo, función ecológica y potencia eficiente, que nos muestran las restricciones de desempeño de una máquina térmica modelada como dicho ciclo. Mostramos una manera de obtener las expresiones analíticas de las mencionadas funciones objetivo, así como las regiones de existencia física de éstas, a partir de las restricciones que permitan construir sus gráficas. Podemos concluir, entre otras cosas, que es posible representar sistemas de transferencia de calor con calor residual convertido en trabajo útil, en el marco de la termodinámica de tiempos finitos.

Palabras Clave – ciclo nulo, calor residual, función objetivo, potencia de salida, eficiencia

Abstract — In the heat transfer process, and its transformation into mechanical energy to produce work, the so-called "residual heat" appears, which is generally used to superheat or preheat a working substance in the system but could also be used to produce an extra work. How the use of residual heat can be represented is not simple and does not usually appear in classical equilibrium thermodynamics. One way to study this situation is taking advantage of the so-called zilch cycle proposed by Arrot. Thus, in this paper we carry out a brief study of the zilch cycle of Arrot, from the point of view of finite time thermodynamics, considering the regions of physical existence of the objective functions, ecological function, and efficient power, which show us the restrictions of performance of a thermal engine modeled as mentioned cycle. We show a way to obtain the analytical expressions of the objective functions, as well as their physical existence regions, based on the restrictions that allow their graphs to be constructed. It can be concluded that it is possible to represent heat transfer systems with residual heat converted into useful work among other things, within the framework of finite-time thermodynamics.

Keywords — zilch cycle, residual heat, objective function, power output, efficiency

I. INTRODUCCIÓN

Un concepto fundamental en el estudio de sistemas termodinámicos es la llamada eficiencia térmica, que se define como la razón entre la cantidad de calor convertido en trabajo y la cantidad de calor dado al sistema, cuyo valor numérico muestra que gran parte del combustible dado al sistema para producir calor se desperdicia, y una cantidad considerable de calor se pierde después de la conversión del calor en trabajo [1,2,3]. El calor no utilizado se conoce como calor residual, y cuando se aprovecha para realizar un precalentamiento de la substancia de trabajo, permite aumentar la eficiencia de la máquina al reducir la cantidad de combustible necesario. Pero el trabajo obtenido de la máquina no aumenta.

Sin embargo, este calor residual podría utilizarse para producir un trabajo extra. Pero en los libros de texto sobre el tema nunca se plantea esta posibilidad, y tampoco existe el estudio de ciclos teóricos que simulen dicha situación. Un problema interesante sería la suposición de modelar un sistema con calor residual aprovechable en trabajo útil y no sólo en ahorro de combustible.

Una interesante referencia a un problema como el planteado es el llamado ciclo nulo (zilch cycle en inglés), utilizado en el contexto de la Primera Ley de la Termodinámica por A. S. Arrot [4], pero más bien planteado como un problema que busca una mejor comprensión de esta ley. Desafortunadamente, existe muy poca literatura sobre el problema. Recientemente se ha intentado dar una explicación de las condiciones de desempeño impuestas originalmente, trabajo total nulo, considerando ciclos similares [5]. También se ha estudiado el ciclo suponiendo una diferencia entre temperaturas de trabajo y temperaturas de las fuentes de calor, sin considerar la condición de trabajo total [6].

El ciclo nulo de Arrot está constituido por cuatro procesos considerados reversibles: una expansión isotérmica seguida de un enfriamiento a volumen constante, y luego de una segunda expansión isotérmica se regresa al estado original, mediante una compresión adiabática. En el caso de la referencia [5], se han propuesto dos alternativas de ciclo nulo: una considerando un ciclo compuesto por dos procesos isobáricos, separados por uno a volumen constante y otro a temperatura constante; y la otra considerando procesos isobáricos seguidos de procesos isocóricos. En [6] se hace un estudio del ciclo de Arrot desde el punto de vista de la llamada Termodinámica de Tiempos Finitos [7-9], proponiendo

interpretar al ciclo como la representación de una máquina térmica con aprovechamiento del calor residual para producir trabajo extra, lo que lleva a considerar la posibilidad de trabajo no nulo en el ciclo original, y por tanto la existencia de potencia diferente de cero.

En el presente trabajo buscamos extender el estudio realizado en las publicaciones [5,6] sobre el ciclo nulo, al considerar como funciones objetivo a la potencia eficiente y una potencia efectiva conocida como función ecológica [10,11,12], que pueden mostrar la viabilidad de las posibles restricciones con las que trabaja un sistema termodinámico, en el contexto de la llamada Termodinámica de Tiempos Finitos. Realizaremos un estudio de las regiones de existencia física de las funciones objetivo, mostrando las expresiones de las potencias comentadas, y las regiones de existencia física de éstas, a partir ciertas restricciones que se obtengan de su expresión analítica, en el llamado régimen de potencia máxima, a semejanza de lo hecho en algunas publicaciones en el contexto de la termodinámica de tiempos finitos. Mostraremos así la viabilidad de que este ciclo se pueda utilizar como un modelo de máquina térmica con calor residual aprovechable. Finalmente expondremos brevemente un análisis de los resultados y las conclusiones que se desprenden de ellos.

Es conveniente mencionar que en la referencia [6] aparecen varios errores de escritura, pero en el fondo la idea se mantiene, y nos referiremos a los resultados ahí obtenidos como punto de partida. El estudio del ciclo nulo puede realizarse de esta manera, obteniendo algo más que una justificación y comprensión de la Primera Ley de la Termodinámica.

Para hacer autocontenido el presente trabajo, haremos una breve exposición sobre los ciclos de potencia de vapor, el calor residual y su uso, y la termodinámica de tiempos finitos. Todas las cantidades utilizadas están dentro de SI.

II. CONTEXTO DE ESTUDIO

Un sistema termomecánico, en el cual el fluido operante sea una sustancia en estado de vapor, puede funcionar con base en un ciclo de producción ó en uno de consumo, de energía motriz. En ambos casos se deben combinar dos o más procesos. La manera como se produce trabajo, por tanto potencia mecánica, se representa con un diagrama [1,2,3]. Dos ejemplos interesantes son los siguientes.

A. Ciclos de potencia a vapor

Recordemos que el ciclo de Carnot es la representación teórica del funcionamiento de la máquina térmica más eficiente posible, trabajando entre dos fuentes de calor a diferente temperatura. En la Fig. 1 mostramos el caso de una máquina térmica simple que trabaja como indica el ciclo de Carnot (llamada máquina de Carnot), en la cual la sustancia de trabajo es vapor de agua. La temperatura del vapor en la caldera debe ser menor que la del depósito de calor (almacén

caliente), en una magnitud infinitesimal, permaneciendo constante. En el momento de ser expulsado calor al depósito a baja temperatura, la temperatura del depósito debe ser menor a la de la sustancia de trabajo en una cantidad infinitesimal. Los procesos en la turbina y la bomba deben ser adiabáticos reversibles. La máquina de Carnot en este caso tiene las dificultades de operación de trabajar con vapor húmedo de baja calidad, cuyo impacto causa erosión intensa de los álabes de la turbina, además de que se debe usar un dispositivo especial para comprimir una mezcla de líquido y vapor, por lo que resulta difícil controlar un proceso de condensación parcial.

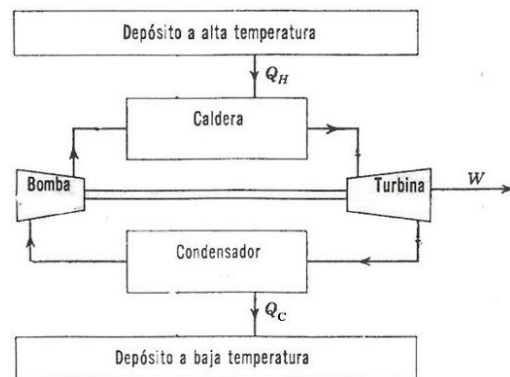


Fig. 1.- Máquina de Carnot, vapor de agua como sustancia de trabajo.

El ciclo de Rankine es la representación del funcionamiento de una máquina que elimina muchas de las dificultades que surgen en el caso de una máquina que funcione como indica el ciclo de Carnot, cuando el fluido de trabajo es vapor de agua. En este ciclo los procesos de calentamiento y de enfriamiento se efectúan a presión constante, además, corresponden a un sistema cerrado, no existe intercambio de masa entre el sistema y sus alrededores.

La dificultad ahora es que, si el vapor entra a la turbina en forma de vapor saturado, debido al alto contenido de humedad, al pasar por la máquina se produce un choque de partículas del líquido provocando la erosión correspondiente de los álabes de la turbina. En la Fig. 2 mostramos dicho ciclo, en donde hacemos la observación de que la línea de color negro intenso corresponde al ciclo real, en tanto que la línea menos intensa corresponde al ciclo idealizado.

Puesto que la máquina de Rankine se caracteriza por la existencia de un calentamiento a presión constante, no hay razón para dejar de calentar el vapor cuando alcanza el estado de vapor saturado. La práctica común consiste en sobrecalentar el vapor, o sea calentarlo hasta que alcance una temperatura mucho más elevada, cuyo efecto está representado en la Fig. 2 por el área rallada 3-3'-4'-4-3.

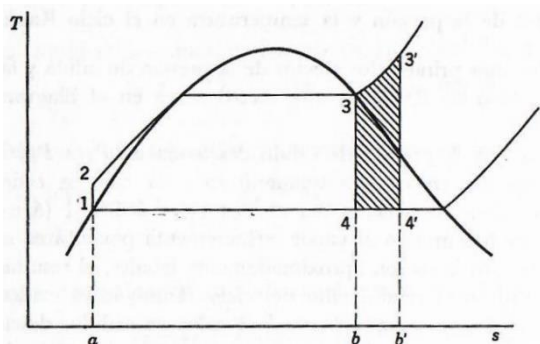


Fig. 2.- Diagrama T-S correspondiente al ciclo Rankine para un vapor.

Para determinar la eficiencia total de la máquina trabajando como el ciclo de Rankine, se calculan los valores del trabajo realizado por la turbina, el trabajo efectuado por la bomba, del calor cedido y del calor agregado. En la Fig. 3 mostramos un esquema de un mecanismo que trabaja como indica este ciclo.

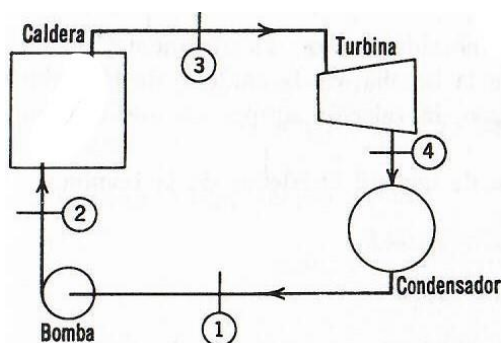


Fig. 3.- Croquis de un sistema termomecánico de ciclo Rankine.

Por otro lado, el objeto de las centrales térmicas es aprovechar la energía calorífica de un combustible para transformarla en electricidad. Esta transformación sigue aproximadamente el siguiente proceso: a) La energía contenida en el combustible se transforma por combustión en energía calorífica. b) La energía calorífica que absorbe el fluido de trabajo se convierte al expandirse en la turbina o motor en energía mecánica. c) La energía mecánica es transformada en energía eléctrica a través de un generador eléctrico. El ciclo Rankine es el ciclo termodinámico que más comúnmente se emplea en las centrales térmicas de vapor y, por ser el ciclo fundamental que siguen las turbinas de vapor, éstas se han mejorado con el tiempo por medio de:

- Disminución de la presión en el condensador
- Aumento de la presión en la caldera
- Empleo de vapor sobrecalentado
- Empleo de un recalentador intermedio
- Precalentamiento del agua de alimentación
- Empleo de ciclos binarios

La temperatura máxima que puede adquirir el vapor sobrecalentado está normalmente limitada por los materiales empleados en la zona de sobrecalentamiento de la caldera. Y los combustibles utilizados son generalmente carbón o gas

natural. Existe una gran variedad de fuentes de calor para la generación de electricidad diferentes a estos combustibles, entre otros una gran variedad de materiales de biomasa y de subproductos de procesos industriales, como la turba, la madera y sus desechos, la paja, los residuos del café, las cáscaras de cereales, los desechos de las minas de carbón, el calor residual de factorías siderúrgicas, las energías geotérmica y solar, así como los procesos de generación de vapor asociados a los de recuperación de subproductos en determinados procesos, como la fabricación de pasta de papel, los residuos sólidos urbanos y la destrucción de residuos sanitarios peligrosos [15].

Como se sabe, en las centrales térmicas de vapor se utilizan como máquinas motrices las máquinas de vapor, o las turbinas de vapor o, en algunos casos, ambos tipos de máquinas que, además de accionar los generadores eléctricos principales, se utilizan para el accionamiento de equipos auxiliares tales como bombas, hogares mecánicos, ventiladores, excitatrices, etc. El vapor necesario para el funcionamiento de las máquinas motrices se produce en recipientes que forman parte de las propias calderas; desde donde el vapor se conduce por canalizaciones hasta las máquinas o las turbinas de vapor [15,16].

Tomemos en cuenta que la combustión es una reacción de oxidación entre un cuerpo combustible y un cuerpo comburente (generalmente oxígeno), provocada por una fuente de energía, normalmente en forma de calor. Esta reacción es exotérmica. Cuando el combustible se combina totalmente con el oxígeno sin dejar más productos residuales que CO_2 y vapor de agua, recibe el nombre de combustión completa. Si el combustible no se combina totalmente con el oxígeno, por ser insuficiente la cantidad de oxígeno en el ambiente, recibe el nombre de combustión incompleta, desprendiendo monóxido de carbono (CO).

La combustión se distingue de otros procesos de oxidación por ser un proceso de oxidación rápida y con presencia de llama (flama); a su vez también se diferencia de otros procesos de oxidación muy rápida (detonaciones, deflagraciones y explosiones) por obtenerse el mantenimiento de una llama estable. Para que la combustión tenga lugar han de coexistir tres factores:

- combustible
- comburente
- energía de activación

Si falta alguno ellos la combustión no puede llevarse a cabo. El comburente universal es el oxígeno, por lo que en la práctica se utiliza el aire como comburente, ya que está compuesto prácticamente por 21% Oxígeno (O_2) y 79% Nitrógeno (N_2). Sólo en casos especiales se utilizan atmósferas enriquecidas en oxígeno e incluso oxígeno puro (por ejemplo, en soldadura). La energía de activación es el elemento desencadenante de la reacción de combustión; en los quemadores habitualmente suele obtenerse mediante una chispa eléctrica entre dos electrodos, en las calderas individuales de gas se obtiene por llama piloto, tren de chispas, etc.

B. El calor residual

Un resultado ineludible de la operación de las máquinas que producen trabajo y de otros procesos energéticos es el calor residual. Es el excedente de calor que se produce por el funcionamiento de una máquina, como consecuencia de procesos que utilizan la energía térmica. Por ejemplo, en un refrigerador el calentamiento del aire en el espacio en el cual se encuentra alojado, o en un motor de combustión liberando calor al medio ambiente. El aprovechamiento de esta energía para aumentar la eficiencia en los procesos de transformación de calor en trabajo es posible.

La "recuperación de calor residual" es el proceso de "integración de calor", es decir, la reutilización de la energía térmica que de otro modo se eliminaría o simplemente se liberaría a los alrededores del sistema. Al recuperar el calor residual, las plantas pueden reducir los costos de energía y las emisiones de CO₂, al mismo tiempo que aumentan la eficiencia energética. Por ejemplo en los automóviles regulares, sin turbo, el motor de gasolina de combustión interna expulsa el gas caliente a través del escape del automóvil después de que se quema su combustible. Ese gas contiene calor y energía cinética, una parte de la cual se puede recuperar. Los motores turboalimentados desvían el gas caliente a una turbina que se utiliza para hacer girar un compresor de aire. El aire comprimido se dirige a la cámara de combustión del motor con la gasolina vaporizada, lo que resulta en un encendido más eficiente y una mayor potencia producida con un menor consumo de combustible.

Los beneficios energéticos de la recuperación del calor residual industrial son importantes y existen varias maneras de lograrlo. Por ejemplo los economizadores de chimenea, comúnmente utilizados para calentar el agua, son de los procedimientos más simples como recurso de recuperación de calor residual. Con ellos se logra utilizar la energía térmica del gas expulsado en el proceso de calentamiento, hacia la pila de calentamiento del agua de alimentación en la caldera, y reduce la cantidad de energía requerida para hacer vapor, como mostramos en la Fig. 4.

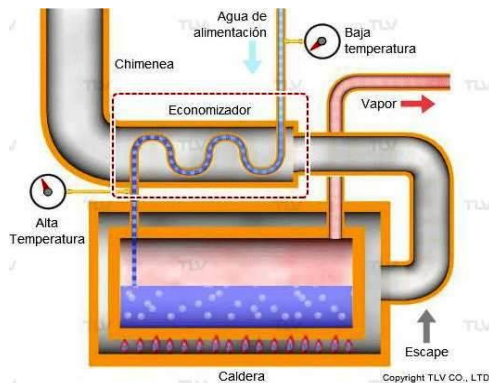


Fig. 4. Economizador de chimenea. Tomado de [16]

C. Termodinámica de Tiempo Finito

El conocido Teorema de Carnot, representado matemáticamente como una función cuya variable es la razón entre las temperaturas baja y alta con las que se supone trabaja una máquina térmica, establece una cota máxima para la operación de ciclos térmicos,

$$\eta_c = 1 - \frac{T_c}{T_H} \quad (1)$$

En (1) T_c es la temperatura del almacén frío y T_H es la temperatura del almacén caliente. El teorema de Carnot, la Primera Ley y la formulación del concepto de entropía pueden considerarse la base de la Termodinámica Clásica (de Equilibrio), que no se ocupa de los efectos de la irreversibilidad en la eficiencia de ciclos térmicos. Por otro lado, la Termodinámica Irreversible Lineal "se ocupa de la irreversibilidad de los procesos de intercambio de calor, pero no de la eficiencia de los ciclos térmicos" [17].

A mediados del siglo pasado, el estudio del funcionamiento de las plantas núcleo-eléctricas permitió que Novikov [18] y Chambadal [19] propusieran tomar en cuenta los procesos irreversibles en el intercambio de calor, entre el reactor y su sistema de refrigeración, para explicar la disminución en los valores de la eficiencia de la planta. Apoyados en esta idea, Curzon y Ahlborn [7] analizaron un ciclo tipo Carnot, considerando el efecto de la ausencia de equilibrio térmico entre los almacenes y la sustancia de trabajo durante el ciclo. Supusieron un intercambio de calor entre los almacenes y la máquina como indica la ley de enfriamiento de Newton, construyendo un ciclo de Carnot más realista, con potencia y producción de entropía no nula, conocido como ciclo generalizado de Carnot, o ciclo de Curzon y Ahlborn (Fig. 5), obteniendo que a potencia máxima una máquina cuyo desempeño se representa con este ciclo tiene una eficiencia que se conoce como eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov,

$$\eta_{CAN} = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_H}} \quad (2)$$

Los valores obtenidos se encuentran notablemente cercanos a los reportados en plantas generadoras de electricidad convencionales (con carbón, gas, o petróleo como combustible), y menores a los que se obtienen con la eficiencia de Carnot, como debe de ser.

El análisis del desempeño de una máquina térmica, como el descrito previamente, se conoce ahora como Termodinámica de Tiempo Finito, o Termodinámica Endorreversible, y permite establecer mejores cotas de operación para procesos reales, sin cambiar el principio básico de que la eficiencia η del ciclo se obtiene como la razón entre el trabajo total realizado, W_{TOT} , y la cantidad de calor absorbido Q_{abs} , por la máquina,

$$\eta = \frac{W_{TOT}}{Q_{abs}} \quad (3)$$

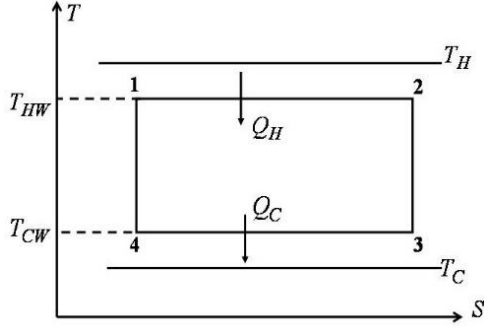


Fig. 5. Ciclo de Curzon y Ahlborn (ciclo generalizado de Carnot) en el plano (S, T) .

En este contexto, para el ciclo generalizado de Carnot, se hallaron otras formas de obtener (2) [8-10], y diversos autores han estudiado otros aspectos no considerados inicialmente [11-14,20-35]. En particular Rebhan estudió un mecanismo con un émbolo móvil dentro de un cilindro, encontrando que el resultado de Curzon-Ahlborn-Novikov corresponde al caso en que la única pérdida de trabajo útil ocurre por la expulsión de calor, y que la eficiencia a potencia máxima tiene un valor entre la eficiencia considerando sólo efectos de fricción sin expulsión de calor, y la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov [28],

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_C}{T_H}\right) < \eta_{Pm\acute{a}x} < 1 - \sqrt{\frac{T_C}{T_H}}. \quad (4)$$

En las referencias que previamente citamos, excepto en [9], se ha supuesto como irrelevante la contribución del tiempo de duración de los procesos adiabáticos en el ciclo. Pero, aunque es pequeño este tiempo debe tener algún efecto en el resultado final de conversión de calor en trabajo. Así, Gutkowicz-Krusin et al. [9] desarrollaron un algoritmo para obtener, a potencia máxima, la eficiencia del ciclo generalizado de Carnot (ciclo de Curzon y Ahlborn) en función de la razón de compresión, $r_c = \frac{V_{\max}}{V_{\min}}$, que en el límite a infinito es la eficiencia de Curzon-Ahlborn-Novikov.

Los valores obtenidos a partir de (2), aunque cercanos a los de varias plantas generadoras de electricidad, sugieren que el criterio de diseño de dichas plantas va acompañado por una alta producción de entropía, pues no se aprovecha todo el calor disponible. Así, Angulo-Brown [10] estudió la superficie obtenida de la expresión para la producción de entropía en función de la eficiencia η y de la razón de temperaturas de los almacenes, obteniendo (2) con el teorema del valor medio aplicado a la superficie asociada a la producción de entropía. Para incluir la entropía en el desempeño del ciclo de Curzon y Ahlborn, propuso el llamado *criterio ecológico*, donde la cantidad por maximizar es una función que combina alta potencia y baja producción de entropía, la *función ecológica*, que se puede interpretar como una potencia efectiva, definida como

$$E \equiv P - T_C \sigma, \quad (5)$$

donde P es la potencia de salida de la máquina, σ es la producción de entropía y T_C es la temperatura del almacén frío. La eficiencia a E máxima tiene un valor cercano a la semisuma de la eficiencia máxima de Carnot, η_C y la eficiencia a máxima potencia η_{CAN} ,

$$\eta_E \approx \frac{1}{2}(\eta_C + \eta_{CAN}) \equiv \eta_S, \quad (6)$$

El criterio ecológico ha sido utilizado para analizar diversos aspectos del funcionamiento de máquinas térmicas [31-34]. Más recientemente se han analizado diversos modelos (ciclos térmicos) de funcionamiento de las máquinas térmicas, bajo el criterio de máxima potencia eficiente y máxima densidad de potencia, funciones-objetivo definidas según se desprende de su nombre, como el producto de la potencia de salida con la eficiencia a potencia máxima y la razón entre potencia de salida con un volumen (el máximo obtenido en el ciclo), respectivamente [11,12].

III. EL CICLO NULO

Un ciclo teórico utilizado inicialmente para entender y mostrar la validez de la primera y la segunda ley de la termodinámica, analizando la variación de la entropía del Sistema es el ciclo nulo. Este ciclo, en la forma propuesta por Arrot [4] está formado por dos procesos isotérmicos conectados por un proceso adiabático y uno isocórico. La condición de nulidad es que el proceso isocórico que conecta los procesos isotérmicos sea tal que el trabajo total del ciclo sea cero. Independientemente del valor del trabajo mostramos el diagrama en los planos (V, p) y (S, T) , Fig. 6.

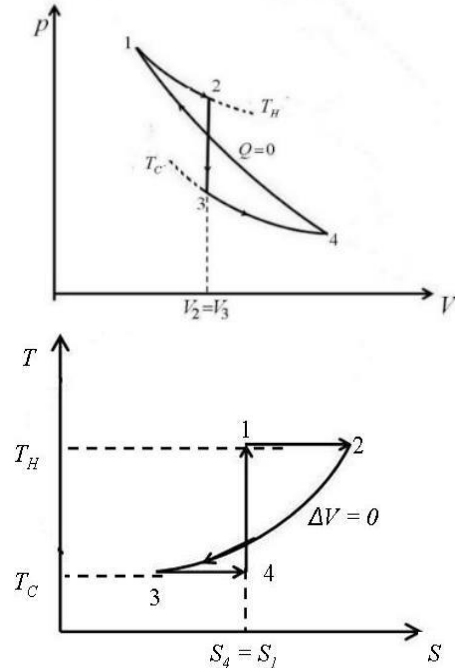


Fig. 6. Representación del ciclo nulo en el plano (V, p) y (S, T) , respectivamente. Tomado de [6].

El ciclo nulo se ha estudiado recientemente utilizando modelos diferentes al de Arrot, como comentamos en la Introducción, por Binder y Tanoue [5], Fig. 7. También se ha estudiado como la representación de un dispositivo que contenga un proceso de regeneración de calor, en el contexto de la termodinámica de tiempos finitos, utilizando el modelo de Arrot. Para este caso fue necesaria su modificación, en donde se incluyó explícitamente la diferencia entre temperaturas de trabajo y temperaturas de la fuente calorífica. Se consideró gas ideal como fluido de trabajo y transferencia de calor como la ley de enfriamiento de Newton [6].

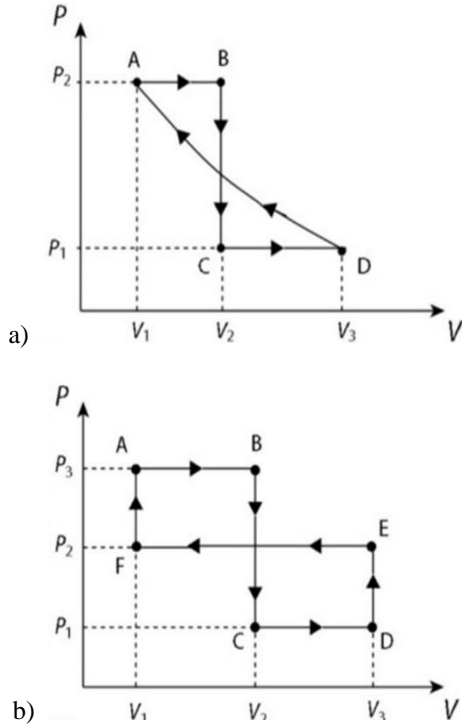


Fig. 7. Modelos de ciclo nulo. a) Dos isobáricas conectadas por una isoterma y una isocórica. b) Isobáricas seguidas isocóricas. Tomado de [5]

Pero, aparte de su estudio en aras de entender mejor la Primera Ley y el concepto de entropía, en [6] se ha buscado utilizarlo para obtener una forma de representar el funcionamiento de una máquina térmica posible. Así, en el estudio del ciclo de Arrot, desde el punto de vista de la termodinámica de tiempos finitos, se busca considerarlo como un modelo adecuado de un sistema termodinámico con regeneración de calor residual, suficiente como para obtener una cantidad de trabajo extra, optimizando el uso de la energía suministrada al inicio del ciclo, considerando la obtención de las expresiones de potencia y eficiencia.

En la Fig. 8 mostramos la modificación necesaria del ciclo de Arrot, haciendo explícita la diferencia entre las temperaturas de la fuente de calor y la debida al calor residual, T_H y T_C , respectivamente, con las temperaturas de trabajo T_{HW} y T_{CW} siendo $T_{HW} > T_{CW}$. Evidentemente se cumple $T_H > T_C$. Tomamos en cuenta que en el proceso isocórico el trabajo es nulo y que el proceso puede suponerse en función

de las temperaturas T_{HW} y T_{CW} . Para las temperaturas T_C y T_{CW} (consideradas muy cercanas), suponemos que el calor residual puede ser utilizado para producir el trabajo en el proceso de 3 a 4. La temperatura T_H es la del único almacén externo de calor. Bajo estos supuestos se obtuvieron los resultados que mostramos a continuación, necesarios para obtener la función ecológica y la potencia eficiente correspondientes, y hacer un breve estudio de ellas. Brevemente incluimos a continuación la manera como se obtiene la potencia [6].

Suponemos gas ideal como substancia de trabajo, así que para los procesos podemos escribir,

$$W_{12} = Q_H = RT_{HW} \ln(V_2/V_1) \quad (7)$$

$$W_{34} = Q_C = RT_{CW} \ln(V_4/V_3) \cdot$$

Para el proceso isocórico, $W_{23} = 0$. La constante R es la de los gases ideales. Durante este proceso el sistema pierde la cantidad de calor,

$$Q_V = C_V(T_{CW} - T_{HW}), \quad (8)$$

y C_V representa la capacidad calorífica a volumen constante. Para la compresión adiabática $W_{41} = -C_V(T_{HW} - T_{CW})$, y el trabajo es la suma de los calores convertidos en trabajo,

$$W_{tot} = RT_{HW} \ln(V_2/V_1) + RT_{CW} \ln(V_4/V_3) - C_V(T_{HW} - T_{CW}) \quad (9)$$

El calor total transformado en trabajo es el de las expansiones isotérmicas, $Q_a = Q_H + Q_C$. En un ciclo el cambio total de energía interna es cero, $\Delta U = 0$. Así, $W_{tot} = Q_{tot}$, siendo $W_{tot} =$ Trabajo total del ciclo y $Q_{tot} =$ calor total transformado en trabajo por el sistema.

Por otro lado, usando la ley de enfriamiento de Newton,

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha(T_i - T_f) \Rightarrow Q = \alpha(T_i - T_f)t \cdot \quad (10)$$

Las temperaturas inicial y final durante el intercambio de calor son T_i y T_f respectivamente, con $T_i > T_f$. El tiempo de dicho proceso es t , y α es la conductancia térmica, considerada igual en los dos procesos isotérmicos. Esto es,

$$t_1 = \frac{RT_{HW} \ln(V_2/V_1)}{\alpha(T_1 - T_{1w})}, \text{ y } t_2 = \frac{RT_{CW} \ln(V_4/V_3)}{\alpha(T_3 - T_{3w})} \quad (11)$$

Para el proceso a volumen constante, utilizando la hipótesis de equilibrio local [17],

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} = C_V \frac{dT}{dt} = r_V C_V, \quad (12)$$

y por tanto, siendo r_V un parámetro medible,

$$t_V = \frac{1}{r_V} (T_{CW} - T_{HW}) \quad (13)$$

Asumiendo $K_V = 1/r_V$ como una tasa de enfriamiento promedio, y el proceso adiabático prácticamente instantáneo, el tiempo total del ciclo queda como,

$$\tau = t_1 + t_2 + t_V$$

$$= \frac{RT_{HW} \ln(V_2/V_1)}{\alpha(T_H - T_{HW})} + \frac{RT_{CW} \ln(V_4/V_3)}{\alpha(T_C - T_{CW})} - K_V(T_{CW} - T_{HW}) \quad (14)$$

Así tenemos que,

$$P = \alpha T_H \frac{\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + z\left(\frac{1}{1-\gamma} \ln z - \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)\right) - \frac{C_V}{R}(1-z)}{\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \frac{1}{1-\gamma} \ln z - \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) - \frac{\alpha T_H K_V}{R}(z-1)} \quad (15)$$

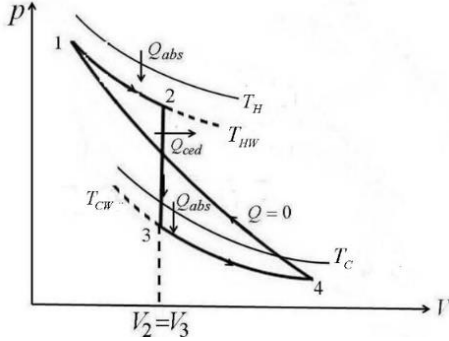


Fig. 8. Ciclo de Arrot modificado en el plano (V,p) , requerido para su estudio a tiempo finito. Tomado de [6]

En (7) hemos utilizado los cambios de variable $u = \frac{T_{HW}}{T_H}$, $z = \frac{T_{CW}}{T_{HW}}$, $\varepsilon = \frac{T_C}{T_H}$ y $K_V = \frac{1}{r_V}$. Aquí u y z son variables, y ε es la razón de las temperaturas conocidas extremas, K_V es la tasa de enfriamiento promedio, y el exponente politrópico es $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$, donde C_P y C_V son las capacidades caloríficas a presión y volumen constante [1,2,3]. La eficiencia, a partir de su definición, queda como,

$$\eta = 1 - \frac{\frac{C_V}{R} \left(1 - \frac{T_{CW}}{T_{HW}}\right)}{\ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{T_{CW}}{T_{HW}} \ln \frac{V_4}{V_3}} \quad (16)$$

Con los mismos cambios en los parámetros en (15),

$$\eta = 1 - \frac{\frac{C_V}{R}}{\ln r_e + C_V \frac{z}{R}} = 1 - \frac{1}{(\gamma-1) \ln r_e + z} \quad (17)$$

Con el debido análisis observamos que el intervalo de existencia física de la eficiencia es $(0,1)$, pero su región de existencia física real depende del tipo de sustancia considerada, y será un subintervalo de $(0,1)$, debido también a la aparición de un factor que incluye el exponente politrópico. Para el intervalo de existencia física de la potencia, consideremos la razón de expansión $r_e = \frac{V_3}{V_1}$, y que las capacidades caloríficas y la constante general de los gases cumplen $R = C_P - C_V$, de manera que $\frac{C_V}{R} = \frac{1}{(\gamma-1)}$. Por último, con la aproximación a primer orden de $\ln z$, pues $|z| < 1$, así que $\ln z = \ln[1 + (z-1)] \approx z-1$, tenemos,

$P \approx$

$$\alpha T_H \frac{(1-z) \left(\frac{C_V}{R} (z-1) + \ln r_e \right) (\varepsilon - zu)(1-u)R}{(\varepsilon - zu)R \ln r_e - z \left[\ln r_e + C_V \frac{(z-1)}{R} \right] (1-u)R + K_V \alpha T_H (\varepsilon - zu)(1-u)(1-z)} \quad (18)$$

La potencia del ciclo tiene valores posibles para las variables u y z en la región $(0,1) \times (0,1)$. Observamos en la Fig. 9, que su región de existencia física real muestra las restricciones en los valores de los parámetros variables, [6].

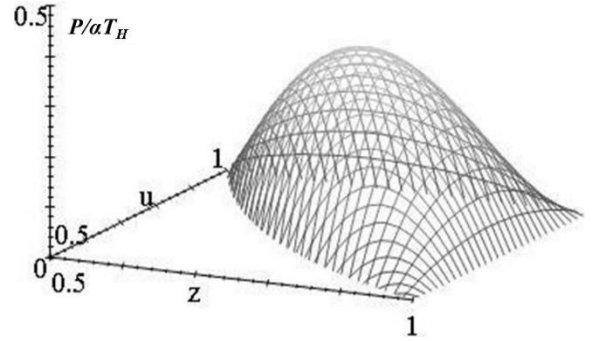


Fig. 9. Comportamiento de la potencia del ciclo de Arrot, en su región de existencia física para las condiciones impuestas en (7). Tomado de [6]

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La llamada potencia eficiente ahora podemos construirla fácilmente a partir de su definición, $P_\eta = P\eta$

$P_\eta \approx$

$$\alpha T_H \frac{(1-z) \left(\frac{C_V}{R} (z-1) + \ln r_e \right) (\varepsilon - zu)(1-u)R \left[1 - \frac{1}{(\gamma-1) \ln r_e + z} \right]}{(\varepsilon - zu)R \ln r_e - z \left[\ln r_e + C_V \frac{(z-1)}{R} \right] (1-u)R + K_V \alpha T_H (\varepsilon - zu)(1-u)(1-z)} \quad (19)$$

Para observar la forma que tendrá esta superficie en las variables u y z conviene graficar la función $\frac{P_\eta}{\alpha T_H}$, de manera que puedan ser observadas las dificultades que aparecen al tomar en cuenta la región de existencia física, sin fijarnos en sus valores numéricos. La Fig. 10 nos muestra una sub-región en la cual los valores son muy grandes, y posteriormente decaen a cero, a medida que los valores de las variables se acercan a su valor límite superior, el valor 1.

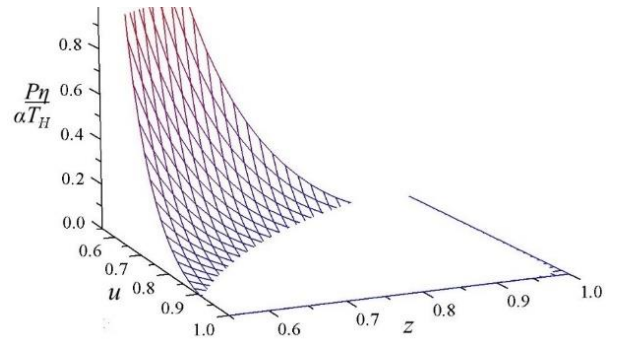


Fig. 10. Comportamiento de la potencia eficiente, en su región de existencia física.

En lo que sigue consideraremos el procedimiento mostrado previamente para obtener las condiciones de existencia física de la potencia, desarrollado en [6], que nos permite obtener la función ecológica y realizar un breve estudio de las condiciones de existencia física de ella.

Para la función ecológica definida en (5), donde P es la potencia de salida de la máquina, siendo T_C la temperatura del almacén frío, la producción de entropía σ queda como

$$\sigma = \frac{\Delta S_{Tot}}{t_{tot}} = \frac{-\frac{RT_{HW}}{T_H} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \frac{RT_{CW}}{T_C} \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) + C_V \ln\left(\frac{T_{CW}}{T_{HW}}\right)}{\frac{RT_{HW}}{\alpha(T_H - T_{HW})} + \frac{RT_{CW}}{\alpha(T_C - T_{CW})} - K_V(T_{CW} - T_{HW})}. \quad (20)$$

La expresión de la función ecológica indica que la producción de entropía debe multiplicarse por la temperatura del almacén frío, entonces tenemos,

$$T_C \sigma = \alpha \frac{T_{CW} \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) - \frac{T_{HW} T_C}{T_H} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \frac{C_V T_C}{R} \ln\left(\frac{T_{CW}}{T_{HW}}\right)}{\frac{T_{HW} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{(T_H - T_{HW})} + \frac{T_{CW} \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)}{(T_C - T_{CW})} - \frac{\alpha K_V T_H}{R} (z - 1)}. \quad (21)$$

Para obtener una expresión más compacta, utilizamos los mismos cambios de variable en (15), con $V_2 = V_3$, y se obtiene

$$T_C \sigma = \alpha T_H \frac{z \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) - \varepsilon \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \frac{\varepsilon C_V}{u R} \ln(z)}{\frac{\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)}{1-u} + \frac{z \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) - \alpha K_V T_H (z-1)}{\varepsilon - uz}}. \quad (22)$$

Además, sabemos que

$$\begin{aligned} T_{HW} V_1^{\gamma-1} &= T_{CW} V_4^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_1}{V_4} = \left(\frac{T_{CW}}{T_{HW}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ \Rightarrow \frac{V_4}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_3} &= \frac{V_1}{V_3} \left(\frac{T_{CW}}{T_{HW}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \end{aligned}$$

Así que

$$\ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = \frac{1}{1-\gamma} \ln(z) - \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right), \quad (23)$$

y (22) toma la forma

$$T_C \sigma = \alpha T_H \frac{z \left[\frac{1}{1-\gamma} \ln(z) - \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) \right] - \varepsilon \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \frac{\varepsilon C_V}{u R} \ln(z)}{\frac{\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)}{1-u} + z \frac{\frac{1}{1-\gamma} \ln(z) - \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)}{\varepsilon - uz} - \frac{\alpha T_H K_V}{R} (z-1)}. \quad (24)$$

Finalmente (24) y la potencia (15) substituidas en la función ecológica (5) nos permiten obtener la expresión

$$E = \alpha T_H \frac{(1+\varepsilon) \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) - \frac{C_V}{R} \left[(1-z) + \frac{\varepsilon \ln(z)}{u} \right]}{\frac{\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)}{1-u} + z \frac{\frac{1}{1-\gamma} \ln(z) - \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)}{\varepsilon - uz} - \frac{\alpha T_H K_V}{R} (z-1)}. \quad (25)$$

Para la razón de expansión, $r_e = \frac{V_3}{V_1}$, y la aproximación a primer orden del $\ln z$, encontramos que

$$E = \alpha T_H \frac{(1+\varepsilon) \ln(r_e) - \frac{C_V}{R} (1-z) \left(1 - \frac{\varepsilon}{u}\right)}{\frac{\ln(r_e)}{1-u} - z \frac{(z-1) \left(\frac{C_V}{R}\right) + \ln(r_e)}{\varepsilon - uz} - \frac{\alpha T_H K_V}{R} (z-1)} \quad (26)$$

o bien realizando el cociente de fracciones,

$$E = \alpha T_H R \frac{(1-u)(\varepsilon - uz) \left[(1+\varepsilon) \ln(r_e) + \frac{C_V}{R} (z-1) \left(\frac{u-\varepsilon}{u}\right) \right]}{R(\varepsilon - zu) \ln(r_e) - zR \left[\ln(r_e) + \frac{C_V}{R} (z-1) \right] (1-u) + \alpha T_H K_V (\varepsilon - uz) (1-u)(1-z)} \quad (27)$$

Para hallar las regiones de existencia física de la función ecológica utilizamos la condición $E(u, z) = 0$, esto es,

$$\alpha T_H R (1-u)(\varepsilon - uz) \left[(1+\varepsilon) \ln(r_e) + \frac{C_V}{R} (z-1) \left(\frac{u-\varepsilon}{u}\right) \right] = 0, \quad (28)$$

donde las condiciones de extremo $z = 0$ y $z = 1$ dan los valores extremos de la razón de expansión, y obtenemos que

$$z = \frac{R}{C_V} \left(\frac{u}{\varepsilon - u} \right) (1+\varepsilon) \ln(r_e) + 1. \quad (29)$$

Para $z = 0$ tenemos:

$$r_e = \exp \left[\frac{C_V (u - \varepsilon)}{(1+\varepsilon)(R \cdot u)} \right], \quad (30)$$

y para $z = 1$

$$r_e = 1. \quad (31)$$

De la condición $E(u, z) = 0$ también obtenemos

$$z = \frac{\varepsilon}{u} \quad (32)$$

Las consideraciones hechas previamente conciernen al caso de potencia nula, por lo que no son totalmente aplicables al modelo. Pero a partir de la expresión obtenida, y con las mismas consideraciones en los parámetros medibles en [6], se obtiene la forma que adquiere la función ecológica, considerándola como potencia efectiva, para las variables u y z , tomando valores de los parámetros medibles involucrados, así como de la razón de expansión, lo que se muestra a continuación, en Fig. 11, Fig. 12, Fig. 13.

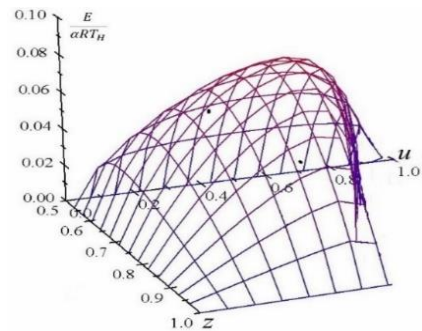


Fig. 11. Vista del comportamiento de la función ecológica en su región de existencia física real, $0 < u < 1$, $\varepsilon < z < 1$

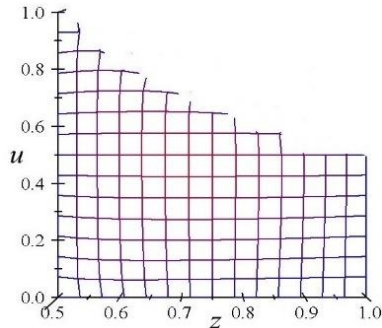


Fig. 12. Vista de la región del plano (u,z) de existencia física de la función ecológica, con $0 < u < 1, \varepsilon < z < 1$

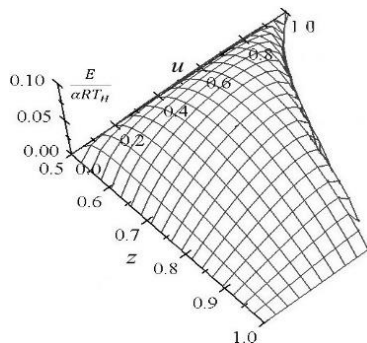


Fig. 13. Vista inclinada de la superficie generada por la función ecológica en su región de existencia física real $0 < u < 1, \varepsilon < z < 1$.

V. CONCLUSIONES

Al obtener las expresiones analíticas de la potencia eficiente y de la función ecológica, podemos obtener sus regiones de existencia física considerando la condición de extremo, particularmente para dos variables neutras como las usadas en [9,13,32] que hemos también utilizado, u otras semejantes, en el presente manuscrito, que nos permiten un estudio en el desempeño de las máquinas térmicas. Para graficar las regiones de existencia de las cantidades objetivo (potencia efectiva y potencia eficiente) consideramos las condiciones extremas $z = 0$ y $z = 1$.

Los resultados obtenidos nos indican que es posible describir el comportamiento de una máquina térmica, o bien, de un sistema termodinámico en general, tomando en cuenta el calor residual que puede utilizarse para sobrecalentar la substancia de trabajo, o para obtener un trabajo extra. Para esto es importante observar gráficamente las regiones de existencia física, pues de ellas se puede obtener un adecuado estudio del desempeño del sistema con calor residual.

El desarrollo del presente Proyecto nos ha permitido entender el problema de cómo utilizar el calor residual, cuya existencia se advirtió desde la invención de las primeras máquinas de vapor. Resulta de gran valor poder entender las dificultades y problemáticas que tienen los ciclos de Carnot y de Rankine, así como sus modos de operación, ya que de otra manera tal vez no sería posible el presente estudio. Un aspecto importante que es necesario señalar es el de la poca información sobre este problema, por lo que se puede abordar

un nuevo tema de investigación que puede llevar a obtener resultados interesantes.

Nos resulta de gran ayuda graficar las regiones de existencia física, ya que de estas se observa cómo pueden escogerse adecuadamente las variables de desempeño de cualquier máquina real.

De esta manera nos fue posible observar las regiones reales de desempeño de las potencias eficiente y efectiva (función ecológica), que hicimos depender de dos variables completamente neutras, mostrando que dichas regiones son subregiones de la que se obtiene a partir de los valores extremos de dichas variables, de acuerdo con su definición.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de la Universidad Autónoma Metropolitana-A (México) para la realización del presente trabajo. A los revisores, sus atinados comentarios.

REFERENCIAS

- [1] M.D. Burghardt; *Ingeniería Termodinámica*, Caps. 15-17. HARLA, México (1984).
- [2] G.J. Van Wylen, R.E. Sontag; *Fundamentos de termodinámica*, Caps. 6-9. LIMUSA, México (1986).
- [3] K. Wark; *Termodinámica*, Caps. 16,17,19. Mc Graw-Hill, México (1985).
- [4] A.S. Arrot; The zilch cycle: An application of the first law of thermodynamics. *Am. J. Phys.* 45 (7), 672-673 (1977).
- [5] P.M.Binder, C.K.S. Tanoue; Variations on the zilch cycle. *Phys. Teach.*, 51, 434-436 (2013).
- [6] D. Ladino-Luna, J.C. Chimal-Eguía, R.T. Páez-Hernández; Estudio del ciclo zilch en el contexto de la termodinámica de tiempos finitos: eficiencia y potencia de salida. *Información Tecnológica*, Vol. 32(2), 3-10 (2021).
- [7] F.L. Curzon, B. Ahlborn; Efficiency of a Carnot Engine at Maximum Power Output. *Am. J. Phys.* 43, 22-24 (1975).
- [8] M. Rubin; Optimal configuration of an irreversible heat engine with fixed compression ratio, *Phys. Rev. A* 22, 1741-1752 (1980).
- [9] D. Gutkowicz-Krusin, I. Procaccia, J. Ross; On the efficiency of rate processes. Power and efficiency of heat engines. *J. Chem. Phys.* 69, 3898-3906 (1978).
- [10] F. Angulo-Brown; An ecological optimization criterion for finite time heat engines. *Appl. Phys.*, 69, 7465-7469 (1991). <https://doi.org/10.1063/1.347562>
- [11] T. Yilmaz; Performance optimization of a Joule-Brayton engine based on the efficient power criterion. *J. Power and Energy* 221, 603-607 (2007).
- [12] T. Yilmaz, Y. Durmusoglu; Efficient power analysis for an irreversible Carnot heat engine. *Int. J. Energy Res.* 32, 623-628 (2008).
- [13] D. Ladino-Luna; Análisis del comportamiento de un ciclo tipo Carnot. *Información Tecnológica*, 21(4), 79-86 (2010).
- [14] O.M. Ibrahim, S.A. Klein, J.W. Mitchell, Optimum heat power cycles of specified boundary conditions. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power.* 113, 514-521 (1991).
- [15] I. Fernández-Diego, A. R. Robles-Díaz. *Centrales de generacion de energía eléctrica*. <https://ocw.unican.es/pluginfile.php/1160/course/section/1407/bloque-energia-IV.pdf>
- [16] www.tlv.com/global/LA/steam-theory/waste-heat-recovery.html
- [17] S.R.De Groot, P. Mazur; *Non-Equilibrium Thermodynamics*, Cap. 3, 20-28. North-Holland, Holanda (1962).
- [18] I.I. Novikov; Engine working in a maximum-power-like regime. *J. Phys D: Appl. Phys.* 34 2068-2074 (2001).

- [19] P. Chambadal; *Récupération de chaleur 'a la Sortie d'un Reactor*, Cap. 3, 39-58. Armand Colin (Ed.), Francia (1957).
- [20] P. Salamon, A. Nitzan, B. Andresen, R.S. Berry; Minimum entropy production and the optimization of heat engines. *Phys. Rev. A.* 21, 2115-2129 (1980)
- [21] M. Rubin; Optimal configuration of a class of irreversible heat engines I. *Phys. Rev. A.* 19, 1272-1276 (1979).
- [22] M. Rubin; Optimal configuration of a class of irreversible heat engines II. *Phys. Rev. A.* 19, 1277-1288 (1979).
- [23] A. De Vos; Efficiency of some engines at maximum-power condition. *Am. J. Phys.*: 53, 570-573 (1985).
- [24] J. L. Torres; Minimal rate of entropy production as a criterion of merit for thermal engines. *Rev. Mex. Fis.*, 34, 18-24 (1988).
- [25] L. Chen, F. Sun, Ch. Wu; Effect of heat transfer law on the performance of a generalized irreversible Carnot engine. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 32, 99-105 (1999).
- [26] Z. Yan, J. Chen; A class of irreversible Carnot refrigeration cycles with a general heat transfer law. *J. Phys D: Appl. Phys.*, 23, 136-141 (1990).
- [27] C.T. O'Sullivan; Newton's law of cooling—A critical assessment. *Am. J. Phys.*, 58, 956-960 (1990).
- [28] E. Rebban, Efficiency of nonideal Carnot engines with friction and heat losses, *Am. J. Phys.* 70 (11), 1143-1149 (2002).
- [29] A. Bejan; Entropy generation minimization: the new thermodynamics of finite-time processes. *J. Appl. Phys.* 79, 1191-1218 (1996). <https://doi.org/10.1063/1.362674>
- [30] K.H. Hoffman, J.M. Burzler, S. Shuberth; Endoreversible thermodynamics. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 22, 311-355 (1997).
- [31] Ch.Y. Cheng, Ch.K. Chen; The ecological optimization of an irreversible Carnot heat engine. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 30, 1602-1609 (1997).
- [32] D. Ladino-Luna, S.M.T. de la Selva; The Ecological Efficiency of a Thermal Finite Time Engine. *Rev. Mex. Fis.*, 46, 52-56 (2000).
- [33] F. Angulo-Brown, R.T. Páez-Hernández; Endoreversible Thermal Cycles with a Nonlinear Heat Transfer Law. *J. Appl. Phys.* 74, 2216-2219 (1993).
- [34] L.A. Arias-Hernández, F. Angulo-Brown; Thermodynamic Optimization of Endoreversible Engines. *Rev. Mex. Fis.*, 40, 866-877 (1994).
- [35] L. Chen, Y. Ge, Ch. Liu, H. Feng y G. Lorenzini; Performance of Universal Reciprocating Heat-Engine Cycle with Variable Specific Heats Ratio of Working Fluid. *Entropy* 22, 397_1-13 (2020).