

Sobre la ecuación de calor de Fourier y un modelo de conducción térmica en la piel humana

C. Nicolás-Hernández¹, A.M. Ares de Parga-Regalado², F. Angulo-Brown¹

¹Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México

Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: angulo@esfm.ipn.mx

²Departamento de Matemáticas e Ingeniería, FES-ACATLAN-UNAM, Estado de México., México

Teléfono (55) 30209492 E-mail: 876686@pcpuma.acatlan.unam.mx

Resumen — En el presente trabajo se estudia un modelo simple unidimensional y no estacionario del comportamiento de la temperatura en las capas de la piel humana al entrar en contacto con un material externo. Basándonos en artículos recientes, en donde se muestra que la efusividad térmica tiene un papel importante para la descripción física del sistema, en este estudio se extiende una condición inicial para la temperatura del material externo. De forma general, se muestra el efecto de la modificación en la temperatura de contacto y se hace una descripción de cómo es que se debe tener una congruencia física y matemática al tratar de modificar las condiciones iniciales, condiciones de frontera y las condiciones coincidentes en la interfaz correspondiente.

Palabras Clave – Condición inicial, ecuación de Fourier, efusividad térmica, temperatura de contacto

Abstract — In the present work, a simple one-dimensional and non-stationary model of the temperature behavior of human skin layers upon contact with an external material is studied. Based on recent papers showing that thermal effusivity plays an important role for the physical description of the system, an initial condition for the external material temperature is extended in this study. In general, the effect of the modification of the contact temperature is shown and a description is given of how to have physical and mathematical congruence when trying to modify the initial conditions, boundary conditions and the matching conditions at the corresponding interface.

Keywords — Initial condition, Fourier equation, thermal effusivity, contact temperature

I. INTRODUCCIÓN

La efusividad térmica o también conocida como el coeficiente de contacto, juega un papel muy importante al tratar de explicar por qué al tocar dos materiales distintos con la misma temperatura, se tiene la sensación de que uno está más caliente que otro [1, 2]. La efusividad térmica de un material se entiende como la capacidad que tiene dicho material para intercambiar energía térmica con el exterior y está definida como [3]

$$\varepsilon = \sqrt{k\rho c} = \frac{k}{\sqrt{\alpha}}. \quad (1)$$

donde k es la conductividad térmica, ρ la densidad de masa, c el calor específico y α la difusividad térmica. Cuando se ponen en contacto térmico de forma ideal dos materiales semi-infinitos con temperaturas T_1 y T_2 ($T_1 > T_2$) por un periodo de tiempo suficientemente pequeño, la superficie de contacto (la interfaz) adquiere una temperatura de contacto T_c dada por [1]

$$T_c = \frac{\varepsilon_1 T_1 + \varepsilon_2 T_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad (2)$$

con ε_1 y ε_2 las efusividades de los materiales considerados. Para entender y obtener la ecuación (2) se utilizará el estudio hecho por S. Oss en [2], el cual consiste en un modelo unidimensional y no estacionario que describe de forma simple, el comportamiento de la temperatura cuando una parte del cuerpo humano entra en contacto con un material a una temperatura dada. Para ello, en dicho estudio, el tejido correspondiente a la piel humana se divide en tres capas principales: la epidermis, la dermis y la hipodermis [2, 4]. La primera es la que está expuesta con el medio ambiente, la segunda es la capa de en medio, mientras que la hipodermis se encuentra en contacto directo con el flujo de sangre. En el estudio se propone una descripción de una sola capa de la piel humana en donde la dermis queda entre la hipodermis y la epidermis la cual juega solo un papel de interfaz con el material externo. En el esquema de la Fig 1, se muestra el modelo utilizado en [2], en donde la capa de la dermis con grosor de $1mm$ tiene calor específico, densidad y conductividad térmica constantes y se denotan por c_S , ρ_S y k_S respectivamente. La epidermis con grosor de $0.1mm$, se representa por la línea roja vertical ($L = 1.1mm$) y es la que separa la dermis del material externo al cual le corresponden los parámetros constantes c_M , ρ_M y k_M . El presente trabajo está organizado como sigue: en la segunda sección se describe el modelo de Oss [2]; en la sección III se presenta una modificación del modelo anterior tomando a $T_M^{(i)}(x)$ como una función no lineal de x ; en la sección IV se presentan los resultados del modelo modificado y finalmente, en la sección V se presentan la discusión y las conclusiones del presente trabajo.

II. MODELO DE OSS

De acuerdo con lo escrito en la sección anterior, en la misma Fig 1, se muestra también el estado inicial ($t = 0$) de las temperaturas involucradas en donde la temperatura de la hipodermis T_B corresponde a la temperatura constante de la sangre, T_{S0} la temperatura inicial externa de la epidermis en $x = L$, mientras que la temperatura inicial del material externo se denota por T_{M0} ($x \geq L$) [2].

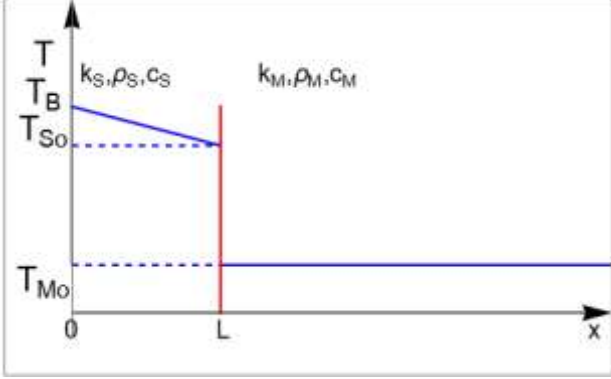


Fig. 1. Estado inicial de las temperaturas del modelo [2].

La recta en azul con pendiente negativa muestra la funcionalidad lineal inicial con respecto a x de la temperatura de la dermis $T_s^{(i)}(x)$, la cual está dada por [2]

$$T_s^{(i)}(x) = T_B + (T_{S0} - T_B) \frac{x}{L}. \quad (3)$$

Por otro lado, la recta horizontal del lado derecho (material externo) indica que el material en $t = 0$ se mantiene a una temperatura constante T_{M0} . El problema matemático consiste en encontrar soluciones para el sistema de ecuaciones diferenciales de Fourier [2, 5]

$$\frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_S} \frac{\partial T_S}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_M} \frac{\partial T_M}{\partial t}, \quad (4)$$

sujetas a las siguientes condiciones:

a) Condiciones de frontera

$$\begin{cases} T_S(x=0, t) = T_B, & t \geq 0 \\ T_M(x \rightarrow \infty, t) = T_{M0}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

b) Condiciones iniciales

$$\begin{cases} T_S(x, t=0) = T_s^{(i)}, & 0 \leq x \leq L \\ T_M(x, t=0) = T_{M0}, & x \geq L \end{cases} \quad (6)$$

c) Condiciones coincidentes

$$\begin{cases} T_S(x=L, t) = T_M(x=L, t), & t \geq 0 \\ k_S \left(\frac{\partial T_S}{\partial x} \right)_{x=L} = k_M \left(\frac{\partial T_M}{\partial x} \right)_{x=L}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

De tal forma que los subíndices S y M indican las cantidades correspondiente a la dermis (piel) y al cuerpo externo.

Al analizar el estudio hecho en [2], de forma natural, se piensa en una extensión del trabajo al modificar las condiciones de frontera, iniciales y aquellas impuestas en la interfaz. Sin embargo, para hacer estos cambios se debe cuidar siempre la consistencia física y matemática del sistema. Para ilustrar lo anterior, es claro que (3) representa un cambio lineal en el comportamiento de la temperatura con respecto a x cuando $t = 0$. De donde vemos que

$$T_s^{(i)}(x=0) = T_B \text{ y } T_s^{(i)}(x=L) = T_{S0}. \quad (8)$$

Se podría proponer, por ejemplo, que $T_s^{(i)}(x)$ no fuera lineal y cambiarlo por

$$T_s^{(i)}(x) = T_B + (T_{S0} - T_B) \frac{x^2}{L^2}, \quad (9)$$

en donde se cumple nuevamente (8). Pero lo anterior no es consistente con

$$\frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_S} \frac{\partial T_S}{\partial t}. \quad (10)$$

Ya que, al fijar a $t = 0$ se tiene que $\frac{\partial T_S}{\partial t} = 0$ y por tanto $\frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} = 0$, cuyas soluciones generales están dadas por

$$T_S(x, 0) = T_s^{(i)}(x) = A + Bx, \quad (11)$$

con A y B constantes que se determinan al imponer (8) y esto lleva precisamente a (3). Una propuesta distinta a (3) implicará modificaciones a la ecuación diferencial misma y por tanto al sistema físico en general. Por otro lado, notemos también, que al fijar a $x = x_0$ con $0 \leq x_0 \leq L$ se cumple que $\frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} = 0$ y por tanto $\frac{\partial T_S}{\partial t} = 0$. En este caso, las soluciones serán $T_S = A(x_0)$ independientes de t , y se debe tener que $A(x_0) = T_B$, para cumplir con la condición de frontera apropiada dada en (5).

III. MODIFICACIÓN DEL MODELO DE OSS

Bajo el orden de ideas de la sección II, en este estudio se propone que la condición inicial para T_M dada en (6), sea tal que T_{M0} cambie por

$$T_M^{(i)}(x) = T_{M0}(1 + \beta e^{-x/L}). \quad (12)$$

El parámetro $\beta \geq 0$ debe ser pequeño y se debe elegir para que se cumpla que $T'_{M0} < T_{S0}$ con

$$T_M^{(i)}(x = L) = T'_{M0} = T_{M0}(1 + \beta e^{-1}). \quad (13)$$

Para entender la modificación dada en (12) se presenta en la Fig. 2, el estado inicial de las temperaturas con el nuevo término. Esta nueva propuesta se entiende como que la temperatura del material decrece de forma suave conforme $L \leq x$ crece. Se puede justificar argumentando que es un comportamiento que se encontró en el laboratorio, aunque debemos ser consistentes con el sistema de ecuaciones y las condiciones que se deben cumplir. Con base en lo explicado, este trabajo consiste en encontrar la temperatura de contacto dentro de un caso límite correspondiente al cambio propuesto en (12), de acuerdo con el sistema de ecuaciones (4), cumpliendo con (5), (6) y (7). Por lo que, en la sección IV, se encontrará la temperatura de contacto, indicando de forma clara e introductoria los métodos de solución utilizados.

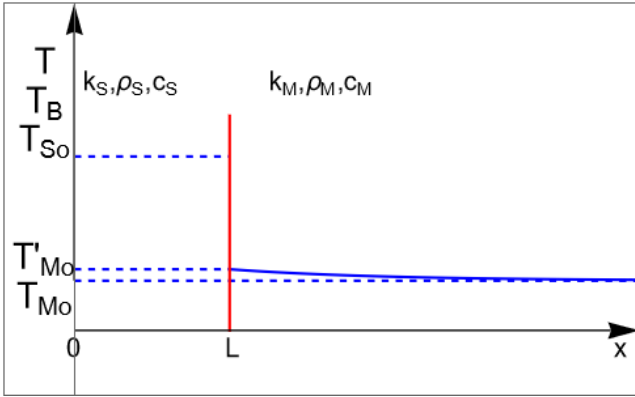


Fig. 2. Estado inicial de las temperaturas del modelo con la modificación apropiada.

IV. RESULTADOS

De forma análoga a cómo se evidenció la forma de (3) a partir de (11), se debe justificar, al menos en un caso límite, que (12) es una propuesta adecuada. Al tomar $t = 0$, se tiene que $\frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2} = 0$ y la propuesta en (12) no es solución de esta ecuación al menos que $\beta = 0$. Sin embargo, (12) es solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_M} \frac{\partial T_M}{\partial t} + \frac{T_{M0}\beta}{L^2} e^{-x/L}, \quad (14)$$

cuando $t = 0$. El término añadido se puede justificar como que proviene de alguna fuente externa, aunque se debe cuidar esto con la ecuación de calor general [5]. Notemos que al fijar $x = x_0$ con $L \leq x_0$, (14) se convierte en

$$\frac{\partial T_M}{\partial t} = \frac{T_{M0}\alpha_M\beta}{L^2} e^{-x_0/L}, \quad (15),$$

cuyas soluciones generales están dadas por

$$T_M(x_0, t) = A + \frac{T_{M0}\alpha_M\beta}{L^2} e^{-x_0/L} t, \quad (16)$$

con A una constante que depende de x_0 . Al pedirle a (16) que sea tal que en $t = 0$ se cumpla que $T_M(x_0, 0) = T_M^{(i)}(x_0)$, entonces (16) se transforma en

$$T_M(x_0, t) = T_{M0} + T_{M0}\beta \left(1 + \frac{\alpha_M t}{L^2}\right) e^{-x_0/L}. \quad (17)$$

Veamos que al suponer que

$$t \ll \frac{L^2}{\alpha_M} \Rightarrow \frac{\alpha_M t}{L^2} L \ll 1, \quad (18)$$

la expresión dada en (17) se aproxima a

$$T_{M0}(x_0, t) \approx T_{M0} + T_{M0}\beta e^{-x_0/L} = T_M^{(i)}(x_0). \quad (19)$$

Por lo que, dentro del enfoque dado en (18), se puede despreciar el término derecho de (15) y por tanto también quitar el término correspondiente en (14). Notando también que cuando $x_0 \gg L$ se tiene que $T_{M0}(x_0, t) \approx T_{M0}$, cumpliéndose la condición de frontera dada en (5). El límite en (18) puede ser rescrito como $t \ll \tau_M = \frac{L^2}{\alpha_M}$ en donde τ_M es el tiempo característico correspondiente a la capa del material externo. Algo similar se supuso en [2], en donde se encuentran unas expresiones particulares para la temperatura de contacto dentro del límite $t \ll \tau_S = \frac{L^2}{\alpha_S}$ en donde τ_S es el tiempo característico correspondiente a la capa de la piel. A partir de ahora, se asumirá que

$$t \ll \min(\tau_M, \tau_S). \quad (20)$$

A continuación, se presentarán los cálculos explícitos para obtener la temperatura de contacto la cual corresponde a

$$Tc(t) = T_S(x = L, t) = T_M(x = L, t). \quad (21)$$

Utilizando la transformada de Laplace se tiene que [6]

$$F_s(x, v) = \mathcal{L}\{T_s(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-vt} T_s(x, t) dt, \quad (22)$$

$$F_M(x, v) = \mathcal{L}\{T_M(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-vt} T_M(x, t) dt,$$

por tanto

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2 F_M}{\partial x^2}, \quad (23)$$

y además

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial T_s}{\partial t}\right\} = vF_s(x, v) - T_s(x, 0) = vF_s(x, v) - T_s^{(i)}(x), \quad (24)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial T_M}{\partial t}\right\} = vF_M(x, v) - T_M(x, 0) = vF_M(x, v) - T_M^{(i)}(x).$$

Utilizando lo anterior ($v > 0$), el sistema dado en (4) se transforma en

$$\frac{\partial^2 F_s}{\partial x^2} = \frac{vF_s}{\alpha_s} - \frac{T_s^{(i)}(x)}{\alpha_s}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 F_M}{\partial x^2} = \frac{vF_M}{\alpha_M} - \frac{T_M^{(i)}(x)}{\alpha_M}.$$

En (24) ya se aplicaron las condiciones iniciales (Ver (3) y (12)), mientras que las otras condiciones con $v > 0$ están dadas por

$$F_s(x = 0, v) = \frac{T_B}{v}, \quad F_M(x \rightarrow \infty, v) = \frac{T_{M0}}{v},$$

$$F_s(x = L, v) = F_M(x = L, v), \quad (26)$$

$$k_s \left(\frac{\partial F_s}{\partial x}\right)_{x=L} = k_M \left(\frac{\partial F_M}{\partial x}\right)_{x=L}.$$

Se resolverá el problema utilizando (25) y (26), recordando que estaremos trabajando con la suposición dada en (20), y bajo la transformada dicha consideración se escribe como

$$\frac{1}{v} \ll \min(\tau_M, \tau_s). \quad (27)$$

De forma general, las soluciones de (25) estarán dadas por

$$F_s(x, v) = F_{SH}(x, v) + F_{SP}(x, v),$$

$$F_M(x, v) = F_{MH}(x, v) + F_{MP}(x, v), \quad (28)$$

en donde los subíndices H y P hacen referencia a las soluciones homogéneas y particulares respectivamente [6]. En ambos casos las soluciones homogéneas estarán dadas por

$$F_{SH}(x, v) = C_{1S}(v) \exp\left[\sqrt{\frac{v}{\alpha_M}} x\right] + C_{2S}(v) \exp\left[-\sqrt{\frac{v}{\alpha_M}} x\right], \quad (29)$$

$$F_{MH}(x, v) = C_{1M}(v) \exp\left[\sqrt{\frac{v}{\alpha_M}} x\right] + C_{2M}(v) \exp\left[-\sqrt{\frac{v}{\alpha_M}} x\right],$$

con C_{iS} y C_{iM} funciones de v a determinar. Para la solución particular $F_{SP}(x, v)$ se propone que

$$F_{SP}(x, v) = A_s(v) + B_s(v)x, \quad (30)$$

y para que (30) sea solución de la primera ecuación de (25) se debe cumplir que $A_s(v) = \frac{T_B}{v}$ y $B_s(v) = \frac{T_{S0} - T_B}{vL}$ y por tanto (30) se convierte en [2]

$$F_{SP}(x, v) = \frac{T_s^{(i)}(x)}{v}. \quad (31)$$

Para la solución particular $F_{MP}(x, v)$ se propone que

$$F_{MP}(x, v) = A_M(v) + B_M(v)e^{-x/L}. \quad (32)$$

La expresión dada en (32) será solución de la segunda ecuación de (25) si $A_M(v) = \frac{T_{M0}}{v}$, mientras que $B_M(v)$ debe cumplir con lo siguiente

$$B_M(v) \left(\frac{L^2 v}{\alpha_M} - 1\right) = \frac{L^2}{\alpha_M} T_{M0} \beta. \quad (33)$$

Al aplicar la condición dada en (27), la cual en este caso se debe cumplir que

$$1 \ll \frac{L^2 v}{\alpha_M}, \quad (34)$$

se tiene que, bajo este límite, (33) se aproxima a $B_M(v) = \frac{T_{M0} \beta}{v}$, y por tanto la Ec. (32) se convierte en

$$F_{MP}(x, v) = \frac{T_M^{(i)}(x)}{v}. \quad (35)$$

Ahora que ya conocemos las expresiones para la Ec. (28) debemos satisfacer las condiciones faltantes dadas en (26). Comenzaremos con la condición $F_s(x = 0, v) = \frac{T_B}{v}$, la cual al

utilizar las Ecs. (3), (28), (29) y (31), se cumple si y solamente si $C_{2S}(v) = -C_{1S}(v)$. Lo cual nos lleva a

$$F_s(x, v) = 2C_{1S}(v) \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{v}{\alpha_s}} x \right] + \frac{T_s^{(i)}(x)}{v}. \quad (36)$$

De forma análoga, utilizando ahora las Ecs. (12), (28), (29) y (35), para cumplir con $F_M(x \rightarrow \infty, v) = \frac{T_{M0}}{v}$, se encuentra que $C_{1M}(v) = 0$, y con esto se obtiene que

$$F_M(x, v) = C_{2M}(v) \exp \left[-\sqrt{\frac{v}{\alpha_M}} x \right] + \frac{T_M^{(i)}(x)}{v}. \quad (37)$$

Al calcular $k_s \left(\frac{\partial F_s}{\partial x} \right)_{x=L}$ y $k_M \left(\frac{\partial F_M}{\partial x} \right)_{x=L}$ e imponiendo las condiciones que se tienen que satisfacer en la capa correspondiente a la epidermis (Ver las Ecs. dadas en (26)) se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} C_{2M}(v) \exp \left[-\sqrt{\frac{v}{\alpha_M}} L \right] &= 2C_{1S}(v) \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{v}{\alpha_s}} L \right] + \frac{T_{S0} - T_B}{v} \\ &\quad - \frac{\beta T_{M0} e^{-1}}{v} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} C_{2M}(v) \exp \left[-\sqrt{\frac{v}{\alpha_M}} L \right] &= -\frac{2e_s}{e_M} C_{1S}(v) \cosh \left[\sqrt{\frac{v}{\alpha_s}} L \right] \\ &\quad - \frac{k_s}{e_M} \left(\frac{T_{S0} - T_B}{v^{\frac{3}{2}} L} \right) - \frac{k_M}{e_M} \left(\frac{\beta T_{M0} e^{-1}}{v^{\frac{3}{2}} L} \right), \end{aligned}$$

con $e_s = \frac{k_s}{\sqrt{\alpha_s}}$ y $e_M = \frac{k_M}{\sqrt{\alpha_M}}$ las efusividades correspondientes a la piel y al material externo respectivamente.

Recordemos que en este estudio estamos trabajando bajo la suposición (27) [2], las cuales se traducen en

$$\sqrt{\frac{v}{\alpha_s}} L \gg 1 \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{v}{\alpha_M}} L \gg 1 \quad (39)$$

y como bajo este límite se tiene que

$$2 \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{v}{\alpha_s}} L \right] \approx \exp \left[\sqrt{\frac{v}{\alpha_s}} L \right], \quad (40)$$

$$2 \operatorname{cosh} \left[\sqrt{\frac{v}{\alpha_s}} L \right] \approx \exp \left[\sqrt{\frac{v}{\alpha_s}} L \right],$$

al igualar las ecuaciones dadas en (38), despreciando los términos de acuerdo con la aproximación considerada, se llega a

$$C_{1S}(v) \exp \left[\sqrt{\frac{v}{\alpha_s}} L \right] = \left(\frac{e_M}{e_M + e_s} \right) \left(\frac{T_{S0} - T_B}{v^{\frac{3}{2}} L} \right) \quad (41)$$

$$- \left(\frac{k_s}{e_M + e_s} \right) \left(\frac{T_{S0} - T_B}{v^{\frac{3}{2}} L} \right) - \left(\frac{e_M}{e_M + e_s} \right) \left(\frac{\beta T_{M0} e^{-1}}{vL} \right).$$

Una expresión análoga que involucra a $C_{2M}(v)$ se encuentra, sin embargo, en este trabajo es solamente de nuestro interés encontrar a la temperatura de contacto definida en (21) siguiendo lo hecho en [2] bajo el límite (27). Por tanto, es suficiente con encontrar a $F_s(x = L, v)$ con base a lo antes explicado y luego utilizar la antitransformada de Laplace para llegar a lo buscado. Es decir, utilizando (40) y (41), de (36) se llega a

$$\begin{aligned} F_s(x = L, v) &= \left(\frac{k_s}{e_M + e_s} \right) \left(\frac{T_B - T_{S0}}{v^{\frac{3}{2}} L} \right) \\ &\quad + \frac{e_M T'_{M0} + e_s T_{S0}}{(e_M + e_s)v}, \end{aligned} \quad (42)$$

y así

$$\begin{aligned} Tc(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ F_s(x = L, v) \} \\ &= \left(\frac{k_s}{e_M + e_s} \right) \left(\frac{T_B - T_{S0}}{L} \right) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ &\quad + \frac{e_M T'_{M0} + e_s T_{S0}}{(e_M + e_s)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{v} \right\} \\ &= \left(\frac{2e_s}{e_M + e_s} \right) \left(\frac{T_B - T_{S0}}{L} \right) \sqrt{\frac{\alpha_s t}{\pi}} \quad (43) \\ &\quad + \frac{e_M T'_{M0} + e_s T_{S0}}{(e_M + e_s)}. \end{aligned}$$

La expresión anterior es la expresión análoga a la encontrada por Oss (Ver Ec. 11 de [2]). La diferencia radica en que, con nuestra modificación, bajo la aproximación (20), en lugar de que en (43) aparezca T_{M0} , se encuentra la dependencia en T'_{M0} . Con lo cual, al ver (13), si $\beta = 0$ se recupera lo obtenido por Oss. En realidad, al fijar un valor para β que dependerá del material, lo obtenido en (43) en este trabajo, es un resultado equivalente al dado en [2]. De hecho, es claro que cuando $t \rightarrow 0$, la ecuación (43) se convierte en

$$Tc(t) \approx \frac{e_M T'_{M0} + e_s T_{S0}}{(e_M + e_s)} \\ \approx \frac{e_M T_{M0}(1 + \beta e^{-1}) + e_s T_{S0}}{(e_M + e_s)}. \quad (44)$$

La ecuación anterior representa precisamente lo planteado cuando se presentó la ecuación (2). Tal y como se menciona en [2], se ve claramente que la temperatura de contacto a tiempos muy cortos no solamente depende de las temperaturas de los cuerpos que divide la interfaz, si no también dependen de las efusividades. De este modelo tan simple se puede concluir, por ejemplo, que esto tiene posibles aplicaciones directas en el diseño de telas para cuidados de quemaduras de la piel [2].

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se expuso, añadiendo una modificación simple, la forma de obtener la temperatura de contacto de acuerdo con el modelo presentado por Oss para tiempos menores a los tiempos característicos de la piel y el material. Dada esta modificación se encuentra que, en términos generales, no afecta la funcionalidad de la temperatura de contacto. Sin embargo, en este trabajo solo se mostraron las soluciones para $x = L$, y con todo lo hecho se puede obtener las soluciones generales, bajo el límite considerado, para las temperaturas tanto de la piel y el material en función de x . Esto se está trabajando actualmente y es muy probable, que se vean las diferencias. Todo lo anterior se está analizando a detalle, ya que en un trabajo futuro se busca generalizar el modelo a un modelo de dos dimensiones.

AGRADECIMIENTOS

A.M. Ares de Parga-Regalado agradece al Departamento de Matemáticas e Ingeniería de la F.E.S. Acatlán U.N.AM. y al S.N.I CONACyT por su apoyo.

REFERENCIAS

- [1] E. Marín, "Thermal Physics Concepts: The Role of the Thermal Effusivity", *The Physics Teacher* 44, 432-434 (2006)
- [2] S. Oss, "A simple model of thermal conduction in human skin: temperature perception and thermal effusivity", *Eur. J. Phys.* 43, 03, 5101 (2022)
- [3] H.S. Carslaw and J.C. Jaeger, "Conduction of Heat in Solids", Oxford University Press, London, (1959)

- [4] M. Strakowska, G. de Mey, B. Wiecek and M. Strzelecki, "A three layer model for the thermal impedance of the human skin: modeling and experimental measurements", *J. Mech. Med. Biol* 15, 0219-5194 (2015)
- [5] J.H Lienhard IV and J.H Lienhard V, "A heat Transfer Textbook", 5th edn Dover, New York (2019)
- [6] M. Braun, "Differential equations and their applications ", 4th edn Springer, New York (2013)