Relación entre los coeficientes de Fourier y la Transformada Discreta de Fourier

Luis Andrés Díaz Leal Merino
Teléfono 56 3105 0121 Correo electrónico: andy-dlm@ciencias.unam.mx

Resumen — **La Transformada Discreta de Fourier (DFT) es una herramienta muy popular en las aplicaciones. En este artículo se demuestra que la DFT puede usarse como un método numérico para aproximar los coeficientes de Fourier de una función periódica.**

Palabras Clave – **Coeficientes de Fourier, condiciones de Dirichlet, DFT, función de variación acotada, función suave a pedazos, Transformada Discreta de Fourier.**

Abstract — **The Discrete Fourier Transform (DFT) is a very popular tool in applications. This article shows that the DFT can be used as a numeric tool to approximate the Fourier coefficients of a periodic function.**

Keywords — **Bounded variation function, DFT, Dirichlet conditions, Discrete Fourier Transform, piecewise smooth function.**

I. Introducción

Se supondrá que todas las funciones tienen como dominio al conjunto de los números reales. Una función f es continua en $[a,b]$ si es continua en cada punto del intervalo, incluyendo los extremos. Un N-vector es una función x, definida en los enteros, con la siguiente propiedad:

$$x_{kN+r} = x_r$$

para todo entero k y $0 \leq r < N$.

Sea f una función de valores complejos. Se define la integral de f sobre el intervalo $[a,b]$ mediante la siguiente identidad:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx$$

donde $i^2 = -1$, y u, v son las partes real e imaginaria de f, respectivamente, siempre y cuando estas funciones sean integrables. Todas las integrales se toman respecto a la medida de Lebesgue. La función es 2π-periódica si cumple la siguiente identidad:

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

para todo número real x. Se denotará por $P(2\pi)$ al conjunto de funciones 2π-periódicas, complejas e integrables en $[0,2\pi]$.

Sea $f \in P(2\pi)$. Se define el n-ésimo **coeficiente de Fourier** de f, denotado $c_n(f)$, mediante la siguiente ecuación:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \qquad (1)$$

La n-ésima **suma parcial de Fourier** de f, denotada $S_n(f)$, está definida mediante la siguiente identidad:

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} \qquad (2)$$

Naturalmente surge la siguiente pregunta: ¿Qué condiciones garantizan que la sucesión definida en (2) converge? Una respuesta parcial está dada en el Teorema 2. Las siguientes definiciones serán útiles.

Una función f es de **variación acotada** en $I = [a,b]$, si existe un número real M tal que para cualquier partición $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(a_{k+1}) - f(a_k)| \leq M$$

La función f es **suave a pedazos** en I si: (1) existe una partición $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tal que f es derivable con continuidad en (a_k, a_{k+1}) para $k = 0, \dots, n-1$; (2) los límites laterales de f en cada punto de I existen y son finitos; y (3) la función f' es integrable en I.

Toda función suave a pedazos es de variación acotada. Para verificar esto nótese que, si f es continua en $I = [a,b]$, y derivable con continuidad en (a,b), entonces la siguiente identidad es válida:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

Lo anterior implica que f es absolutamente continua en I, por lo cual es de variación acotada. La función sigue siendo de variación acotada aun si sus valores cambian en los extremos de I. Por lo cual una función suave a pedazos siempre es de variación acotada.

Si una función es de variación acotada en un intervalo I, entonces los límites laterales de f existen en cada punto de I, y es integrable en dicho intervalo. Esto es consecuencia del teorema de Jordan (ver la Sección 6.3 de [6]).

Una función f satisface las **condiciones de Dirichlet** en I, si cumple alguna de las siguientes condiciones:

1. f es de variación acotada en I.
2. f tiene una cantidad finita de discontinuidades infinitas y, cuando se excluyen vecindades arbitrariamente pequeñas de dichas discontinuidades, la función es de variación acotada en los intervalos restantes. Más aun, la función es integrable en I.

Una función f tiene una discontinuidad infinita en x_0 si los límites laterales de f en x_0 son ambos ∞ o $-\infty$. Por ejemplo, considérese la función $f \in P(2\pi)$, definida en $(0,2\pi)$ mediante la fórmula:

$$f(x) = log\left(2\, sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Entonces f tiene discontinuidades infinitas en $x = 0, 2\pi$. Cuando se excluye el intervalo $[0,\delta) \cup (2\pi - \delta, 2\pi]$, con $0 < \delta < \pi$, la función es de variación acotada en $[\delta, 2\pi - \delta]$. Por lo tanto f satisface las condiciones de Dirichlet en $[0,2\pi]$.

Teorema 1 Sea f una función que satisface las condiciones de Dirichlet en $[0,2\pi]$. Entonces existe C tal que:

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{|n|}$$

para $n \neq 0$.

Demostración. El caso en que f es de variación acotada puede consultarse en [5]. El caso en que f tiene discontinuidades infinitas se sigue fácilmente del anterior.

Teorema 2 Sean f una función 2π-periódica que satisface las condiciones de Dirichlet en $[0,2\pi]$ y x un número real. Supóngase que:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2}\lim_{h \to 0^+}[f(x+h) + f(x-h)]$$

existe (incluye el caso en que es igual a ∞ o $-\infty$). Entonces $S_n(f,x)$ converge a $\hat{f}(x)$; en particular, si f es continua en x, entonces $S_n(f,x)$ converge a $f(x)$. Más aun, si f es continua en un intervalo cerrado y acotado, entonces $S_n(f)$ converge uniformemente a f en dicho intervalo.

Demostración. En [4] se demuestra que el resultado es válido si existe C tal que:

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{|n|}$$

para $n \neq 0$. Esta desigualdad es válida por el Teorema 1.

Teorema 3 Sea $f \in P(2\pi)$. Supóngase que f satisface las siguientes condiciones:

1) f es continua.
2) f es de variación acotada en $[0,2\pi]$.
3) f' existe excepto posiblemente en una cantidad numerable de puntos.

Supóngase además que existe una función g que satisface las condiciones de Dirichlet en $[0,2\pi]$, y que $g = f'$ casi donde quiera. Entonces existe C tal que:

$$c_n(f) \leq \frac{C}{n^2}$$

para toda $n \neq 0$.

Demostración. Este teorema puede consultarse en [2], aquí se han añadido algunos detalles. Los incisos 1), 2) y 3) implican que f es absolutamente continua. Esto se sigue del criterio de Banach-Zarecki. La hipótesis de que f' existe excepto en una cantidad numerable de puntos implica que f tiene la propiedad N de Luizin. Esto es consecuencia del lema 7.25 de [7].

Como la integración por partes es válida para funciones absolutamente continuas, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx \qquad (3)$$

El Teorema 1 implica que existe C tal que:

$$|c_n(g)| \leq \frac{C'}{|n|}$$

para $n \neq 0$. Insertando la desigualdad anterior en (3) se obtiene el resultado.

II. La transformada discreta de Fourier

En esta sección se muestra que la Transformada Discreta de Fourier nace naturalmente como un método para aproximar los coeficientes de Fourier.

Sea f una función continua en el intervalo $I = [a,b]$ y N un número natural. Se define:

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}$$

La regla del trapecio afirma lo siguiente:

$$\int_a^b g(x)\,dx \approx \Delta x\left(\frac{g(a)+g(b)}{2}+\sum_{k=1}^{N-1} g(x_k)\right)$$

donde:

$$x_k = a + k\Delta x$$

Sustituyendo $a = 0$, $b = 2\pi$, $\Delta x = 2\pi/N$, $g(x) = f(x)e^{-inx}$ y asumiendo que f es 2π-periódica, se obtiene:

$$2\pi c_n(f) \approx \frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)e^{-2\pi ink/N}$$

de donde:

$$c_n(f) \approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)e^{-2\pi ikn/N} \tag{4}$$

El lado derecho de **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** sugiere la siguiente definición. Dado x un N-vector, la **Transformada Discreta de Fourier** de x (**DFT**, por sus siglas en inglés) es el N-vector $F\{x\}$ definido mediante la siguiente identidad:

$$F_n\{x\} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega^{kn} \tag{5}$$

donde:

$$\omega = e^{2\pi i/N}$$

Ahora **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** puede reescribirse de la siguiente forma:

$$c_{-n}(f) \approx \frac{1}{N}F_n\{x\} \tag{6}$$

donde:

$$x_k = f(2\pi k/N)$$

Puede verificarse fácilmente que $F\{x\}$ es efectivamente un N-vector. Se sigue de la identidad:

$$\omega^{k+N} = \omega^k$$

III. LA DFT COMO APROXIMACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

La relación **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** indica que $F\{x\}$ puede utilizarse para aproximar los coeficientes de Fourier de una función continua, pero no especifica la precisión de esta aproximación. En esta sección se investiga esta última cuestión. Se comenzará tratando el caso sencillo, para el cual se requiere el siguiente resultado conocido como la **fórmula de sumación de Poisson** [1].

Teorema 4 Sea $f \in P(2\pi)$ y supóngase que $S_n(f,x)$ converge a un límite finito $l(x)$ para toda x. Entonces:

$$\frac{1}{N}F_n\{x\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-n+kN}(f) \tag{7}$$

donde:

$$x_m = l\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

Demostración. Por hipótesis se tiene:

$$l\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\omega^{mk}$$

de donde:

$$x_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\omega^{mk}$$

Insertando esta cantidad en (5) se obtiene:

$$\begin{aligned} F_n\{x\} &= \sum_{m=0}^{N-1} x_m\omega^{mn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\omega^{mk}\right)\omega^{mn} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[c_k(f)\sum_{m=0}^{N-1}\omega^{m(k+n)}\right] \end{aligned}$$

luego:

$$F_n\{x\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) z_k \tag{8}$$

donde:

$$z_k = \sum_{m=0}^{N-1}\omega^{m(k+n)}$$

Pero $z_k = 0$ a menos que $\omega^{k+n} = 1$, en cuyo caso $z_k = N$. Lo anterior sucede si y solo si $k + n = jN$ para algún entero j. Sustituyendo en (8) se obtiene el resultado.

El siguiente teorema es conocido como teorema de muestreo de Nyquist-Shannon**.** Es una respuesta parcial a la siguiente pregunta: ¿Puede una función recuperarse completamente si se conoce una cantidad finita de sus valores?

Teorema 5 ([1]) Supóngase que:

$$f(x) = \sum_{k=-M+1}^{M} c_k(f)e^{ikx}$$

Para cada entero k se define:

$$x_k = f(2\pi k/N)$$

Si $N \geq 2M$, entonces:

$$\frac{1}{N}F_n\{x\} = c_{-n}(f)$$

siempre que $-\frac{N}{2} \leq n < \frac{N}{2}$.

Demostración. Claramente se tiene $l(x) = f(x)$ para toda x. El resto se sigue del Teorema 4 al notar que $kN - n = 0$ si $k \neq 0$.

Si una función satisface la hipótesis del Teorema 5, se dice que es de **banda limitada**. El resultado a continuación se aplica a una clase más amplia de funciones.

Teorema 6 ([3]) Sea $f \in P(2\pi)$ una función que satisface las hipótesis del Teorema 3. Se define:

$$x_k = f(2\pi k/N)$$

Entonces existe C tal que:

$$\left|\frac{1}{N}F_n\{x\} - c_{-n}(f)\right| \leq \frac{C}{N^2}$$

para toda $-\frac{N}{2} \leq n < \frac{N}{2}$.

Demostración. Como f es continua y de variación acotada, el Teorema 1 implica que:

$$l(2\pi k/N) = f(2\pi k/N)$$

donde $l(x)$ es como en el Teorema 4. Ahora bien, del mismo teorema se deduce que:

$$\frac{1}{N}F_n\{x\} - c_{-n}(f) = \sum_{k\neq 0} c_{-n+kN}(f)$$

Por el Teorema 3 se tiene:

$$\sum_{k\neq 0}|c_{-n+kN}(f)| \leq \frac{2C}{N^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(-n/N+k)^2}$$

Por lo tanto, para finalizar la prueba basta verificar que la suma:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(-n/N+k)^2}$$

está acotada por una constante que no depende de n ni de N. Esto se sigue de la hipótesis $-\frac{N}{2} \leq n < \frac{N}{2}$.

En el siguiente teorema se cambian un poco las hipótesis para incluir funciones que tienen una cantidad finita de discontinuidades.

Teorema 7 ([3]) Sea $f \in P(2\pi)$ una función acotada. Supóngase que f es continua excepto en una cantidad finita de puntos. Supóngase además que f' existe y es continua, excepto posiblemente en una cantidad numerable de puntos, y que existe una función g que cumple las siguientes condiciones:

1) $g = f'$ casi donde quiera.
2) f y g satisfacen las condiciones de Dirichlet en cada intervalo compacto donde f es continua.

Defínase:

$$x_k = f(2\pi k/N)$$

Entonces existe un número real C tal que:

$$\left|\frac{1}{N}F_n\{x\} - c_{-n}(f)\right| \leq \frac{C}{N}$$

Demostración. Para cada entero k se define:

$$\alpha_k = \frac{2\pi k}{N}$$

Sea $I_k = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$. Se define la función h_N en cada intervalo I_k de la siguiente forma: (1) si f es continua en I_k, entonces $h_N = f$; y (2) si I_k contiene un punto en el cual f es discontinua, entonces$g(x) = u(x)$, donde u es la línea que une los puntos $(\alpha_k, f(\alpha_k))$ y $(\alpha_{k+1}, f(\alpha_{k+1}))$. Con esta definición puede verificarse que h_N satisface las hipótesis del

Teorema 5 y que coincide con f en cada punto α_k, lo cual implica que:

$$\left|\frac{1}{N}F_n\{x\} - c_{-n}(h_N)\right| \leq \frac{C_1}{N^2} \qquad (9)$$

para algún número C_1.

Por otro lado, h_N coincide con f excepto en una cantidad finita de intervalos I_k, por lo cual se tiene:

$$|c_n(f) - c_n(h_N)| \leq \frac{1}{2\pi}\sum_k \int_{I_k} |f(x) - h_N(x)|\, dx$$

donde la suma corre sobre aquellos intervalos $I_k \subset [0,2\pi]$ en los cuales f es discontinua. Pero $|f - h_N|$ es acotada y la longitud de I_k es $2\pi/N$. Esto implica, junto con la desigualdad anterior:

$$|c_n(f) - c_n(h_N)| \leq \frac{C_2}{N} \qquad (10)$$

para algún número C_2. El resultado se sigue de (9) y (10) haciendo uso de la desigualdad triangular.

IV. Ejemplos

Sea $f \in P(2\pi)$. Se define el N-vector:

$$x_k = f\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

Con el propósito de mostrar la exactitud de (6), se define la siguiente función:

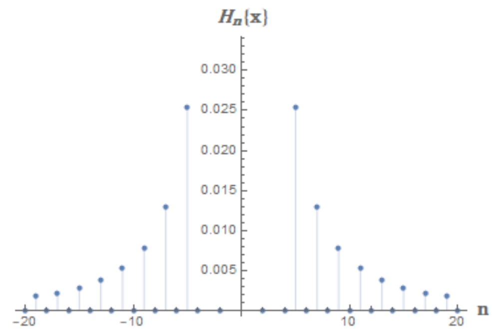
$$H_n\{x\} = \frac{1}{N}|F_{-n}\{x\}| \approx |c_n(f)|$$

En esta sección se darán ejemplos de dos funciones distintas: una función continua y una función suave a pedazos. Se mostrarán las gráficas de las respectivas $H\{x\}$.

Defínase f en el intervalo $[0,2\pi)$ mediante la siguiente fórmula:

$$f(x) = 1_{[0,\pi)}x + (2\pi - x)1_{[\pi,2\pi)}$$

donde 1_X es la función característica del conjunto X. Se trata de una onda triangular, la cual resulta continua. La siguiente figura muestra la gráfica de $\mathcal{H}\{x\}$ para $N = 2000$, donde

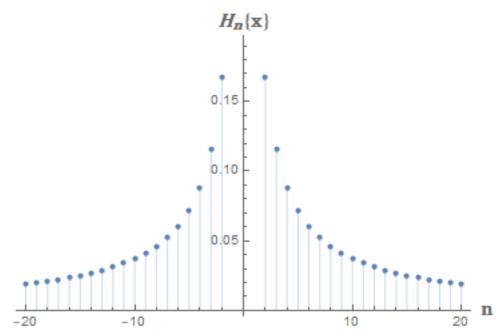


$-20 \leq n \leq 20$. Obsérvese la excelente precisión aun cuando N es un valor pequeño.

El siguiente ejemplo es una función suave a pedazos, discontinua en los extremos del intervalo. Defínase f en $[0,2\pi)$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

La figura a continuación muestra la gráfica de H_n para $N = 2000$, donde $-20 \leq n \leq 20$. La precisión es mucho mejor de lo que estima el Teorema 7.



V. Conclusiones

La DFT puede utilizarse para aproximar los coeficientes de Fourier de una función aun si esta presenta discontinuidades. Los ejemplos en la sección anterior muestran que estas aproximaciones son mucho más precisas de lo que los estiman Teoremas 6 y 7. Una sola DFT es suficiente para calcular una gran cantidad de coeficientes de Fourier.

Referencias

[1] W. L. Briggs and Van Endem Henson (1995). "*The DFT: an owner's manual for the discrete Fourier transform*". Philadephia USA, Society for Industrial and Applied Mathematics.

[2] H. S. Carslaw (1930). "*Introduction to the theory of Fourier series and integrals"*. Third edition, Dover Publications, Inc.

[3] Van Emden Henson (1990). "*Fourier methods of image reconstruction*". Ph.D. dissertation at University of Colorado.

[4] Y. Katznelson (2004). "*An introduction to harmonic analysis"*. Third edition, Cambridge University Press.

[5] M. Taibleson (1967). "*Fourier coefficients of functions of bounded variation"*. Proc. Amer. Math. Soc. 18, 766.
[6] H. L. Royden and P. M. Fitzpatrick (2010). "*Real analysis".* Fourth edition, China Machine Press.
[7] W. Rudin (1988). *"Análisis Real y Complejo".* Third edition, México. McGraw Hill.