

Sobre la optimización termo-económica de un modelo de Novikov para una ley de calor del tipo Stefan-Boltzmann

¹A.M. Ares de Parga-Regalado, D. Caballero-Gallegos

Departamento de Matemáticas e Ingeniería, FES-ACATLAN-UNAM, Estado de México., México
Teléfono (55) 30209492 E-mail: 876686@pcpuma.acatlan.unam.mx¹

Resumen — En un trabajo reciente la bien conocida función de costos de De Vos fue generalizada para incluir un término relacionado directamente con el costo de mantenimiento y operación. En ese artículo, entre otras cosas, se presentaron expresiones correspondientes a las eficiencias para una ley de calor del tipo Stefan-Boltzmann proveniente de un análisis termoeconómico para diferentes regímenes de operación. En el presente estudio se extiende el análisis utilizando la metodología usual de optimización de la termodinámica de tiempos finitos y se presentan nuevas aproximaciones semianalíticas para el caso de máxima potencia.

Palabras Clave – Aproximaciones semianalíticas, optimización termo-económica, Stefan-Boltzmann

Abstract — In a recent paper the well-known De Vos cost function was generalized to include a term directly related to the maintenance and operation cost. In that paper, among other things, expressions corresponding to the efficiencies for a Stefan-Boltzmann type heat transfer law from a thermoeconomic analysis for different operating regimes were presented. In the present study, the analysis is extended using the usual finite-time thermodynamics optimization methodology and new semi-analytical approximations are presented for the maximum power regime.

Keywords — Semi-analytical approximations, thermo-economic optimization, Stefan-Boltzmann

I. INTRODUCCIÓN

En 1995 Alexis De Vos presentó un estudio termoeconómico, dentro del contexto de la termodinámica de tiempos finitos (TTF), de un modelo de planta generadora de energía tipo Novikov [1-3]. El modelo de Novikov esquematizado en la Fig. 1, consiste en dos reservorios térmicos: uno con temperatura T_1 y el otro con temperatura T_2 , ambas constantes tales que $T_1 > T_2$. Entre estos reservorios se encuentra la componente endorreversible tal que la temperatura variable del núcleo T_{1w} se asocia con la temperatura del reservorio superior de la máquina de Carnot. También se incluye un conductor térmico con conductividad térmica denotada por α . El análisis termoeconómico de De Vos se basa en la maximización de la función de beneficios definida como [1]

$$F = \frac{W}{C}, \quad (1)$$

en donde W representa la potencia de salida y C es la función de costos definida en su forma más general como [4]

$$C = aQ_{max} + bQ_1 + cW, \quad (2)$$

con a, b y c son constantes cuyas unidades están dadas por \$/Watt. De tal forma que el primer término proporcional a Q_{max} definido como el calor máximo que puede ser extraído del reservorio térmico sin suministrar trabajo, se asocia con la inversión y por tanto con el tamaño de la planta; el segundo término correspondiente a Q_1 , el cual representa el calor por unidad de ciclo extraído del reservorio superior, representa el costo del combustible [1,4]. Mientras que el último término, el cual corresponde a una generalización propuesta en [4] y no fue introducido originalmente por De Vos [1], hace referencia al costo de operación y mantenimiento (O&M). En [4], se hizo un análisis termoeconómico utilizando la Ec. (1) del modelo de Novikov para distintos regímenes de operación y distintas leyes de calor. En este trabajo, es de nuestro interés concentrarnos en el caso de Stefan-Boltzmann, siguiendo lo hecho en [4], y examinar la expresión analítica para las eficiencias que se muestra para el caso de máxima potencia sin considerar el costo de mantenimiento.

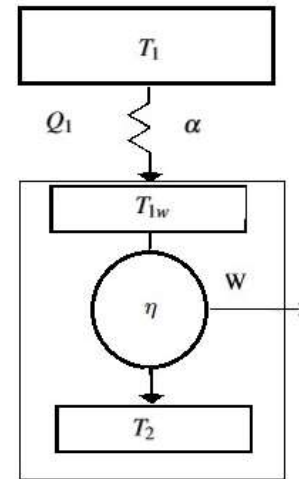


Fig. 1. Modelo de Novikov para una planta generadora de energía

Este artículo se ordena como sigue: en la sección II se muestran los resultados más importantes presentados en [4] que se utilizarán en este trabajo; en la sección III se hace uso de un método semianalítico [5], para dar nuevas aproximaciones de las eficiencias óptimas para el caso SB al hacer una optimización termo-económica del modelo de

Novikov para el régimen de operación de máxima potencia (MP) [4,6]. Finalmente, en la sección IV, se presentan las conclusiones y los futuros trabajos.

II. EFICIENCIAS ÓPTIMAS PARA EL MODELO DE NOVIKOV BAJO EL RÉGIMEN DE MÁXIMA POTENCIA Y PARA UNA LEY DE CALOR DEL TIPO STEFAN-BOLTZMANN

A partir de las definiciones que se dieron del calor máximo Q_{max} y el calor de entrada Q_1 , siguiendo lo hecho en [4] para el caso de SB y con $R = 1$, se tiene que

$$Q_{max} = \alpha T_1^4 (1 - \tau^4), \quad (3)$$

$$Q_1 = \alpha T_1^4 \left(1 - \left(\frac{\tau}{(1-\eta)} \right)^4 \right), \quad (4)$$

en donde $\tau = \frac{T_2}{T_1}$. La eficiencia η , la cual está definida como

$$\eta = \frac{W}{Q_1}, \quad (5)$$

fue incorporada dentro de las Ecs. (3) y (4) haciendo uso de

$$W = Q_1 - Q_2, \quad (6)$$

de acuerdo con la primera y segunda ley de la termodinámica aplicada a la Fig. 1 y con Q_2 el calor de salida por unidad de ciclo. De forma explícita al utilizar (5) y (4) se llega a [4]

$$W = \eta Q_1 = \eta \left(1 - \left(\frac{\tau}{(1-\eta)} \right)^4 \right). \quad (7)$$

Al sustituir lo correspondiente en (1) y (2), para el caso a estudiar en este trabajo, al maximizar F se encuentran las eficiencias óptimas de operación para el caso de Novikov para una ley de calor de radiación. Dicha maximización, propuesta por primera vez por De Vos en [1], toma en cuenta tanto el funcionamiento termodinámico de la planta como la parte económica. Esto se refleja en dichas eficiencias, las cuales, de forma general, están acotadas por arriba por la eficiencia de Carnot η_c e inferiormente por la eficiencia correspondiente a lo planteado por Curzon-Ahlborn en [7]. Aunque en [4] se incluyeron también los regímenes de operación respectivos a la máxima función ecológica y a la correspondiente a potencia eficiente [8,9,10], en este trabajo solo nos concentraremos en el caso de máxima potencia, apuntando que esto se puede extender para los otros casos. A partir de lo anterior en [4] se obtuvo la siguiente expresión para las eficiencias óptimas para el caso de SB ($R=1$)

$$\eta_{MP}^{SB}(\tau, f) = 1 - \frac{8(f-1)\tau}{(4f-3)\tau + \sqrt{16(1-f)\tau + (4f-3)^2\tau^2}}. \quad (8)$$

En donde f es el costo fraccional de combustible el cual se define como [1,4]

$$f = \frac{bQ_1}{aQ_{max} + bQ_1}, \quad (9)$$

el cual debe cumplir con $0 \leq f \leq 1/2$. Al hacer un análisis general de la expresión dada en (8) lo primero que salta a la vista es que al graficar dicha expresión con respecto a f para, por ejemplo, $\tau = 0.7$ y $\tau = 0.6$, se ve que las eficiencias son mayores que uno como se muestra en la Fig. 2. Esto viola las leyes de la termodinámica, ya que las eficiencias no pueden ser mayores que uno.

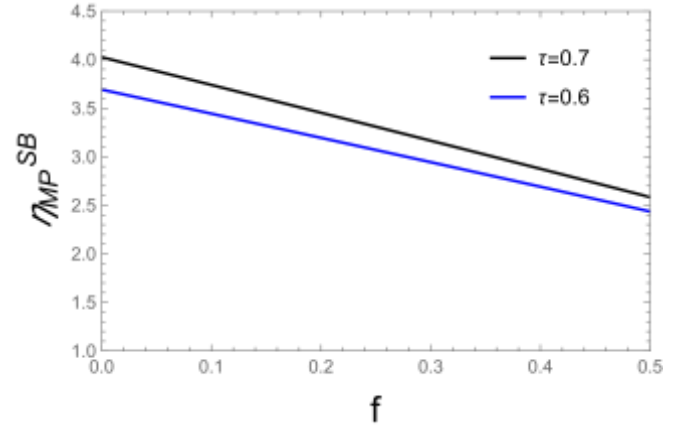


Fig. 2. Eficiencias óptimas η_{MP}^{SB} contra f para $\tau = 0.7$ y $\tau = 0.6$.

De forma resumida, al maximizar (1), incluyendo ya la expresión correspondiente de f , para obtener η_{MP}^{SB} se deben encontrar los ceros del siguiente polinomio

$$1 + 10\eta^2 - 10\eta^3 + 5\eta^4 - \eta^5 - \tau^4 + \eta(-5 + (-3 + 4f)\tau^4) \quad (10)$$

y de ahí seleccionar aquellos valores que sean termodinámicamente consistentes. La expresión dada en (10) es un polinomio de grado 5 para η , encontrar una expresión analítica de las eficiencias óptimas no es una tarea sencilla y generalmente se obtiene de forma numérica [11]. Creemos que la expresión mostrada en (8) dada en [4], proviene simplemente de un error de cálculo ya que ésta se obtiene al suponer que (3) y (4) tienen la siguiente forma

$$Q_{max} = \alpha T_1^4 (1 - \tau)^4, \quad (11)$$

$$Q_1 = \alpha T_1^4 \left(1 - \left(\frac{\tau}{(1-\eta)} \right)^4 \right), \quad (12)$$

lo cual representa otro tipo de ley de calor distinta a SB. En este trabajo se utilizará un método usado en [5], para dar una aproximación de las expresiones analíticas.

III. APROXIMACIONES ANALÍTICAS PARA LAS EFICIENCIAS ÓPTIMAS

De acuerdo con lo explicado en la sección anterior, a continuación, se hará uso del método utilizado en [5] adaptado al presente estudio para dar una aproximación analítica de las eficiencias buscadas.

Para ello, en la Fig. 3, se muestra la gráfica de F contra η con $\tau = 0.6$ y para distintos valores de f .

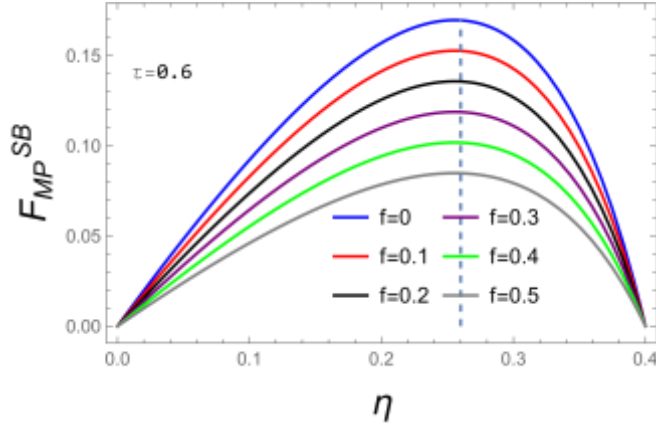


Fig. 3. Función objetivo F_{MP}^{SB} contra η para $\tau = 0.6$ y distintos valores de f .

Las eficiencias óptimas buscadas son los valores de η que maximizan a F . En la Fig. 3 la línea vertical punteada muestra que un solo valor de η funciona para los distintos f con $\tau = 0.6$. La idea general es solamente trabajar con una parte de las gráficas en la vecindad de los valores de η apropiados. Bajo este orden de ideas, el método consiste en tomar el polinomio dado en (10) y hacer una expansión en serie de Taylor para η alrededor de un punto k adecuado hasta orden 2. De lo anterior se obtiene un polinomio de grado 2, que al igual a cero y resolver para η , se obtienen dos expresiones en función de τ , f y k . Claramente se debe elegir aquella que se congruente con los requerimientos físicos y en este caso se tiene

$$\eta_{MP}^{SB}(\tau, f, k) = \frac{g(k, \tau, f) + \sqrt{-40(-1+k)^3 h(k, \tau) + (g(k, \tau, f))^2}}{20(-1+k)^3}, \quad (12)$$

con

$$g(k, \tau, f) = -5 + 30k^2 - 40k^3 + 15k^4 - 3\tau^4 + 4f\tau^4, \quad (13)$$

y

$$h(k, \tau) = -1 + 10k^3 - 15k^4 + 6k^5 + \tau^4. \quad (14)$$

Para el caso de la Fig. 3, claramente el punto de expansión lo tomaremos como $k = 0.26$ debido a que alrededor de ese punto estarán los valores de η buscados. Algo similar, se encuentra para el caso con $\tau = 0.7$, pero en este caso el punto de expansión se toma como $k = 0.18$ como se puede observar en la Fig. 4.

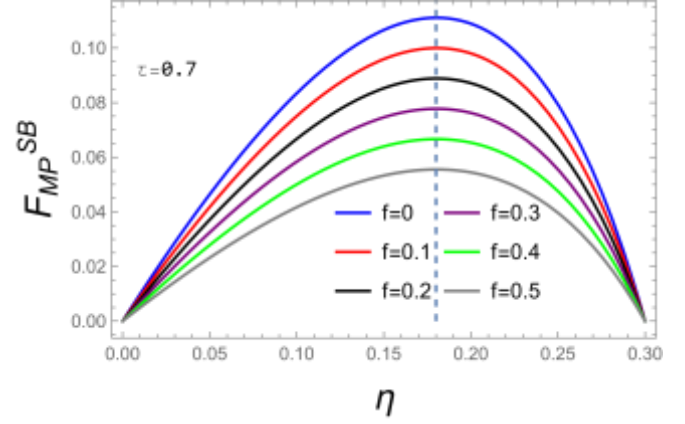


Fig. 4. Función objetivo F_{MP}^{SB} contra η para $\tau = 0.7$ y distintos valores de f .

En la Fig. 5 se muestra la gráfica de $\eta_{MP}^{SB}(\tau, f, k)$ contra f para distintos valores de τ .

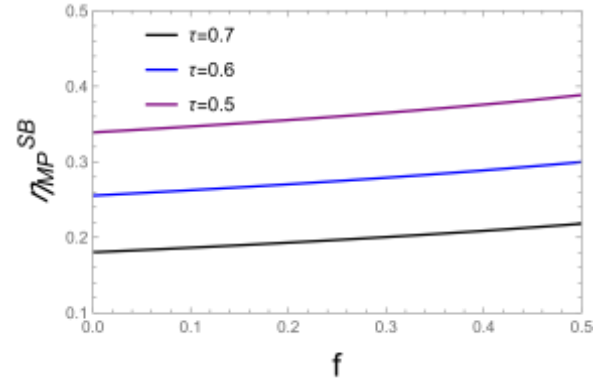


Fig. 5. Aproximación de las eficiencias óptimas η_{MP}^{SB} contra f para $\tau = 0.7$, $\tau = 0.6$ y $\tau = 0.5$.

La expresión dada en (12) es una aproximación analítica de la expresión exacta y funciona para una cierta vecindad centrada en el punto de expansión k y para los valores de f y τ adecuados.

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo se obtuvo una aproximación para las eficiencias óptimas del modelo de Novikov para una ley de calor SB bajo el régimen de máxima potencia, a partir de los métodos usuales de la optimización termo-económica. La expresión encontrada es semianalítica, ya que claramente depende del punto de expansión que se elige de forma un

tanto empírica. Pero debido a la naturaleza del método resulta bastante claro cómo elegir a este punto. De forma natural, esto puede ser aplicado para otros regímenes de operación e incluyendo el término asociado a la operación y mantenimiento.

AGRADECIMIENTOS

A.M. Ares de Parga-Regalado agradece al Departamento de Matemáticas e Ingeniería de la F.E.S. Acatlán U.N.A.M. y al S.N.I CONACyT por su apoyo.

REFERENCIAS

- [1] A. De Vos, Endoreversible thermoeconomics, *Energy Convers. Magnag.* 36, (1995), 1-5.
- [2] I. Novikov, The efficiency of atomic power stations (a review), *At. Energiya* 3, (1957), 409, In English translation; *J. Nucl. Energy* 7, (1958).
- [3] P. Chambadal, *Les Centrales Nucléaires*, A. Colín, Paris, (1957).
- [4] J.C. Pacheco-Paez, F. Angulo-Brown, and M.A. Barranco-Jiménez, Thermoeconomic Optimization of an Irreversible Novikov Plant Model under Different Regimes of Performance, *Entropy* 19, (2017), 118.
- [5] A. M., Ares de Parga-Regalado and M.A. Ramírez-Moreno. On the Analysis of an Ecological Regime for Energy Converters. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=4105113>
- [6] K. H. Hoffmann, J. M. Burzler and S. Schubert. Endoreversible thermodynamics. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 22, (1997), 22, 311–355.
- [7] F. Curzon and B. Ahlborn. Efficiency of a Carnot engine at maximum power output. *Am. J. Phys.* 43, (1975), 22–24.
- [8] F. Angulo-Brown. An ecological optimization criterion for finite-time heat engines. *J. Appl. Phys.* 69, (1991), 7465–7469.
- [9] L. A. Arias-Hernández and F. Angulo-Brown. Reply to Comment on A general property of endoreversible thermal engines. *J. Appl. Phys.* 89, (2001), 1520–1523.
- [10] T. Yilmaz. A new performance criterion for heat engine: Efficient power. *J. Energy Inst.* 79, (2006), 38–41.
- [11] M.A. Barranco-Jiménez. Finite-time thermoeconomic optimization of a non endoreversible heat engine. *Rev. Mex. Fis.* 55, (2009), 211–220.