

Espectro de frecuencias cuasinormales de potenciales que decaen exponencialmente

J. Jaimes-Najera¹, A. López-Ortega¹

¹Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55040 Fax (55) 5729-55015 E-mail: jnajera333@gmail.com, alopezo@ipn.mx

Resumen — Los potenciales que decaen exponencialmente tienen la característica de que su decaimiento conforme su variable independiente tiende a más o menos infinito es muy pronunciado, sean estos potenciales tipo barrera o pozo. En este trabajo calculamos numéricamente el espectro de frecuencias cuasinormales de un potencial de este tipo para dos formas distintas, mediante dos diferentes métodos. Es interesante estudiar este tipo de potenciales por la similitud de su forma con los que aparecen en el cálculo de las frecuencias cuasinormales en un espacio-tiempo de Schwarzschild-de Sitter.

Palabras Clave – Agujeros negros, modos cuasinormales, Schwarzschild-de Sitter.

Abstract — The potentials that decay exponentially are characteristic because of their pronounced decay as the independent variable tends to plus or minus infinite, whether they are barrier or well potentials. In this work we calculate numerically the quasinormal frequencies spectrum of this potential, by the means of two different methods. It is interesting to study this kind of potentials because of the similarity of their shapes with those of the ones appearing on the calculation of quasinormal frequencies in a Schwarzschild-de Sitter background.

Keywords — Black Holes, Quasinormal modes, Schwarzschild-de Sitter.

I. INTRODUCCIÓN

Los modos cuasinormales están en todo alrededor de nosotros, siendo los que modelan de la mejor manera el mundo real, pues son modos de vibración de ondas que decaen conforme se propagan. Los sistemas idealizados no se encuentran presentes en la naturaleza, pues siempre hay factores externos que influyen en los mismos. Físicamente, nuestro sistema se compone de radiación propagándose alrededor de un agujero negro, bien puede ser radiación electromagnética, un campo escalar o bien ondas gravitatorias, en cuyo caso lo que oscila es el espacio-tiempo mismo. Las ondas de nuestro sistema decaen por la presencia del horizonte de sucesos del agujero negro que provoca que la energía no se conserve; como bien sabemos, una vez que la materia o la radiación cruzan hacia dentro del agujero negro (el cual está delimitado por la superficie cerrada llamada horizonte de sucesos) es imposible que regresen hacia fuera. Las ecuaciones que gobiernan este sistema suponen un problema de eigenvalores, cuyas soluciones son las frecuencias cuasinormales de oscilación del campo que se

propaga alrededor del agujero negro. Estas cantidades pueden ser complejas, dado que nuestro problema de eigenvalores es no hermitiano. La parte real de nuestra frecuencia se asocia con la oscilación temporal de la onda que representa la solución; mientras que la parte imaginaria está asociada con el decaimiento exponencial de la onda.

En la gran mayoría de los casos, las ecuaciones involucradas en el cálculo de las frecuencias cuasinormales de agujeros negros son complicadas más allá de la capacidad analítica de resolución. Es por esto que se ha desarrollado un amplio catálogo de métodos numéricos para resolver estas ecuaciones de forma aproximada y se han desarrollado diferentes criterios para asegurar la fiabilidad de los resultados obtenidos. En nuestro caso, estamos interesados más en el espectro de eigenvalores de nuestro problema que en la función solución, pues estos eigenvalores corresponden a las frecuencias cuasinormales, y éstas tienen codificada la información del agujero negro en estudio, son únicas para cada caso: son como su “huella digital”.

Existe un caso en los agujeros negros de Schwarzschild-de Sitter cercano al extremo en el que el horizonte de sucesos y el horizonte cosmológico están cerca uno del otro, en este límite el potencial efectivo de la ecuación que gobierna el sistema se reduce al potencial de Pöschl-Teller [1], su decaimiento es exponencial y las formas de las gráficas de ambos potenciales mencionados son similares en este límite, razón por la cual es interesante estudiar estos potenciales y sus espectros de frecuencias cuasinormales.

La organización de este trabajo es como sigue: en la sección II presentamos los dos métodos numéricos implementados para calcular el espectro de frecuencias cuasinormales de nuestro potencial en cuestión: en la sección I A se expone el Método Pseudoespectral; mientras que en la sección I B presentamos el Método de Iteración Asintótica y una versión mejorada de éste. En la sección III presentamos los resultados obtenidos: los espectros de frecuencias cuasinormales calculados por el Método Pseudoespectral en la sección III A y en la sección III B a través del Método de Iteración Asintótica Mejorado. Discutimos los resultados en la sección IV para presentar finalmente nuestras conclusiones en la sección V.

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP 20221379 y por CONACYT

II. METODOLOGÍA

A continuación, exponemos dos de los métodos implementados para calcular el espectro de eigenvalores de la ecuación

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\omega^2 - v(x))\psi = 0, \quad (1)$$

con el potencial dado por

$$V(x) = \frac{V_0}{Ae^{ax} + Be^{-bx} + C}, \quad (2)$$

el cual tiene la cualidad de que sus gráficas toman diferentes formas.

A. El Método Pseudoespectral

Se hace la aproximación de la función sobre una malla por polinomios de Chebyshev $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N$, donde los a_n corresponden a los coeficientes de estos polinomios, con la propiedad de que conforme $N \rightarrow \infty$ los puntos se distribuyen con la densidad por unidad de longitud dada por [2]

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j \in \{0, 1, \dots, N\}. \quad (3)$$

Esta malla de puntos se acumula en los extremos del intervalo $[-1, 1]$. Es la proyección sobre una recta de los puntos igualmente espaciados de la mitad de una circunferencia.

Se definen las entradas de la matriz de diferenciación de Chebyshev como sigue (Fig.1):

$$\begin{aligned} (D_N)_{00} &= \frac{2N^2+1}{6}, & (D_N)_{NN} &= -\frac{2N^2+1}{6}, \\ (D_N)_{jj} &= \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, & j &\in \{1, 2, \dots, N-1\}, \\ (D_N)_{ij} &= \frac{c_i}{c_j} \frac{-1^{i+j}}{(x_i-x_j)}, & i \neq j, & \quad i, j \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \end{aligned} \quad (4)$$

donde

$$c_i = \begin{cases} 2 & i = 0 \text{ ó } N \\ 1 & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (5)$$

Fig. 1. Representación esquemática de la matriz de diferenciación de Chebyshev.

Con esto, veremos la ecuación (1), transformada con cambios de variable para que su dominio sea $[-1, 1]$, como un operador sobre la función, haciendo las siguientes asociaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &\rightarrow D_N \\ \frac{d^2}{dx^2} &\rightarrow D_N^2. \end{aligned}$$

Ahora, se ve de (1) que tenemos un problema de eigenvalores cuadrático en ω :

$$(\omega^2 M + \omega C + K)x = 0 \quad (5)$$

con $\omega \in \mathbb{C}$, $x, M, C, K \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{C})$. Por lo cual, procedemos a hacer una linealización [3]:

$$L1: \begin{bmatrix} 0 & N \\ -K & -C \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$L2: \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} C & M \\ N & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

con lo cual resulta un problema de eigenvalores generalizado:

$$Ax = B\omega x, \quad (8)$$

con $A, x, B \in \mathcal{M}_{2N \times 2N}(\mathbb{C})$ el cual es soluble de manera más adecuada.

B. El Método de Iteración Asintótica

El presente método (AIM por sus siglas en inglés) es utilizado para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias homogéneas de segundo orden:

$$\chi'' = \lambda_0(x)\chi' + s_0(x)\chi, \quad (9)$$

teniendo $\lambda_0(x)$ y $s_0(x)$ funciones de clase $C^\infty(a, b)$. Ahora, si derivamos (9) [4,5]:

$$\chi''' = \lambda_1(x)\chi' + s_1(x)\chi \quad (10)$$

con los coeficientes

$$\lambda_1 = \lambda_0' + s_0 + (\lambda_0)^2 \quad (11)$$

y

$$s_1 = s_0' + s_0\lambda_0. \quad (12)$$

Conforme sigamos derivando, de manera iterativa, obtendremos que s_n y λ_n estarán dados en términos de sus antecesores y las derivadas de sus antecesores, teniendo así el patrón

$$\chi^{(k+2)} = \lambda_k(x)\chi' + s_k(x)\chi \quad (13)$$

con $\lambda_k(x)$ y $s_k(x)$ dados por

$$\lambda_k(x) = \lambda_{k-1}'(x) + s_{k-1}(x) + \lambda_0(x)\lambda_{k-1}(x) \quad (14)$$

y

$$s_k(x) = s_{k-1}'(x) + s_0(x)\lambda_{k-1}(x). \quad (15)$$

Se propone que para un número de iteraciones suficientemente grande se cumple que

$$\frac{s_k(x)}{\lambda_k(x)} = \frac{s_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)} \equiv \beta(x) \quad (16)$$

para alguna función $\beta(x)$. Los eigenvalores pueden obtenerse al encontrar las raíces de un polinomio comúnmente llamado “condición de discretización”:

$$\delta_k = s_k\lambda_{k-1} - s_{k-1}\lambda_k = 0 \quad (17)$$

donde al dar una elección específica de $k \in \mathbb{N}$ estamos terminando el número de iteraciones en ese valor de k [6].

C. El Método de Iteración Asintótica Mejorado

El método aquí presentado (IAIM por sus siglas en inglés) [7] está basado en el anterior y aumenta sobremanera la rapidez del cálculo, pues en lugar de usar las relaciones de recurrencia (14) y (15), se expanden $\lambda_k(x)$ y $s_k(x)$ en series de Taylor alrededor del punto x_0 en el que se realiza el AIM:

$$\lambda_k(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} c_k^i (x - x_0)^i \quad (18)$$

$$s_k(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} d_k^i (x - x_0)^i \quad (19)$$

con c_k^i y d_k^i los i -ésimos coeficientes de la serie de Taylor de $\lambda_k(x)$ y $s_k(x)$, respectivamente. Ahora, usando (18) y (19) en (14) y (15), obtenemos

$$c_k^i = (i+1)c_{k-1}^{i+1} + d_{k-1}^i + \sum_{j=0}^i c_0^j c_{k-1}^{i-j} \quad (20)$$

$$d_k^i = (i+1)d_{k-1}^{i+1} + \sum_{j=0}^i d_0^j c_{k-1}^{i-j} \quad (21)$$

con los cuales definimos una nueva “condición de discretización”:

$$d_k^0 c_{k-1}^0 - d_{k-1}^0 c_k^0 = 0. \quad (22)$$

El polinomio en ω se obtiene de esta nueva condición, de una manera mucho más rápida para el cálculo numérico y sin los errores de precisión que supone hacerlo con el método original.

III. RESULTADOS

A. Método Pseudoespectral

Calculamos numéricamente el espectro de frecuencias cuasinormales del potencial (2) para distintos valores de V_0, A, B, C, a y b (Figs. 2 y 3):

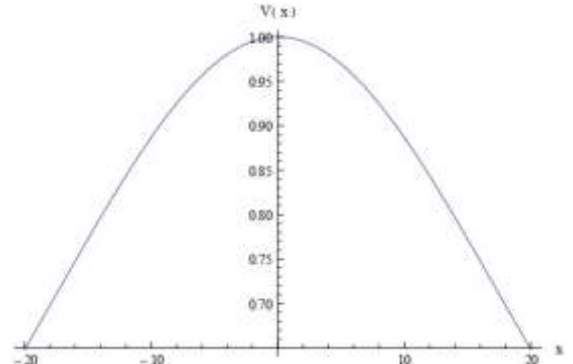


Fig. 2. Gráfica del potencial (2) con $V_0 = 2, A = 1, B = 1, C = 0, a = 1/20$ y $b = 1/20$.

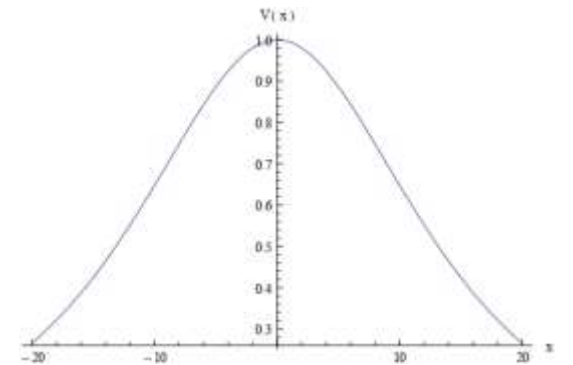


Fig. 3. Gráfica del potencial (2) con $V_0 = 2, A = 1, B = 1, C = 0, a = 1/10$ y $b = 1/10$.

TABLA I.

PRIMERAS 7 FRECUENCIAS CUASINORMALES PARA EL POTENCIAL (2) CON $V_0 = 2, A = 1, B = 1, C = 0, a = 1/20, b = 1/20$. CALCULADAS CON EL MÉTODO PSEUDOESPECTRAL.

n	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$
1	1	- 0,018
2	0,999	- 0,053
3	0,999	-0,088
4	0,998	- 0,124
5	0,997	- 0,159
6	0,995	- 0,195
7	0,993	- 0,230

TABLA II.

PRIMERAS 8 FRECUENCIAS CUASINORMALES PARA EL POTENCIAL (2) CON $V_0 = 2, A = 1, B = 1, C = 0, a = 1/10, b = 1/10$. CALCULADAS CON EL MÉTODO PSEUDOESPECTRAL.

n	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$
1	1,414	-0,035
2	1,413	-0,106
3	1,411	-0,177
4	1,408	-0,247
5	1,405	-0,318
6	1,400	-0,389
7	1,395	-0,460
8	1,389	-0,531

Es importante mencionar que se ejecutó el algoritmo para un tamaño de matriz $N = 30$, después para $N = 37$ y $N = 44$. Se compararon las listas de frecuencias obtenidas para cada tamaño y se seleccionaron aquellas que se repiten en las tres listas. Las frecuencias presentadas en las Tablas I y II, son las comunes entre los tres espectros, para cada elección de parámetros del potencial (2).

B. El método de Iteración Asintótica Mejorado

Presentamos a continuación los espectros de frecuencias cuasinormales del potencial (2) para los mismos valores de los parámetros que los calculados por el método pseudoespectral, ahora obtenidos a partir del método IAIM:

TABLA III.

PRIMERAS 10 FRECUENCIAS CUASINORMALES PARA EL POTENCIAL (2) CON $V_0 = 2, A = 1, B = 1, C = 0, a = 1/20, b = 1/20$. CALCULADAS CON EL MÉTODO IAIM.

n	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$
1	1	- 0,018
2	0,999	- 0,053
3	0,999	-0,088
4	0,998	- 0,124
5	0,997	- 0,159
6	0,995	- 0,195
7	0,993	- 0,230
8	0,991	-0,265
9	0,988	-0,301
10	0,986	-0,336

TABLA IV.

PRIMERAS 10 FRECUENCIAS CUASINORMALES PARA EL POTENCIAL (2) CON $V_0 = 2, A = 1, B = 1, C = 0, a = 1/10, b = 1/10$. CALCULADAS CON EL MÉTODO IAIM.

n	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$
1	1,414	-0,035
2	1,413	-0,106
3	1,411	-0,177
4	1,408	-0,247
5	1,405	-0,318
6	1,400	-0,389
7	1,395	-0,460
8	1,389	-0,531
9	0	-1,083
10	0	-1,275

Las frecuencias cuasinormales reportadas en las Tablas III y IV, son las comunes entre las listas obtenidas a partir de tres números de iteración diferentes, que corresponden a tres elecciones diferentes de k : $k = 100, k = 92$ y $k = 86$. Una tabla para cada elección de los parámetros del potencial (2).

IV. DISCUSIÓN

Para asegurar la fiabilidad de nuestras frecuencias cuasinormales obtenidas por el método pseudoespectral, se ejecutó el algoritmo a tres diferentes tamaños de matriz, $N = 30, N = 37$ y $N = 44$, pues N es directamente proporcional al grado de precisión del método. Posteriormente se compararon las tres listas de frecuencias de cada tamaño de matriz para obtener aquellas frecuencias que coincidan a tres cifras después del punto decimal. Esto nos habla de la estabilidad numérica de las frecuencias obtenidas, pues son las cantidades que esencialmente no cambian conforme se aumenta el grado de precisión y, por lo tanto, son las que serían cercanas al valor real, como confirmamos más adelante.

Para el método IAIM, su grado de precisión es directamente proporcional a k . Aplicamos el mismo criterio comparando las listas de frecuencias cuasinormales obtenidas para $k = 100, k = 92$ y $k = 86$. Se presentan las que coinciden a tres cifras después del punto decimal entre las tres listas.

A partir de las Tablas I y III, podemos observar que los espectros de frecuencias cuasinormales obtenidos por los dos métodos diferentes coinciden hasta tres cifras después del punto decimal hasta el número de modo 7 para esa elección de los parámetros del potencial (2); mientras que al observar las Tablas II y IV las primeras 8 frecuencias cuasinormales coinciden hasta 3 cifras después del punto decimal.

V. CONCLUSIONES

Hasta donde conocemos, en este trabajo los espectros de frecuencias cuasinormales del potencial (2) se reportan por

primera vez. Hemos trabajado con potenciales simétricos, en los que $a = b$, pues la estabilidad numérica de los espectros es mayor en este caso. Puede apreciarse que la parte real de las frecuencias cuasinormales se mantiene esencialmente constante para ambas elecciones de parámetros del potencial (2), comportamiento que es evidentemente parecido al del espectro de frecuencias cuasinormales del potencial de Pöschl-Teller, el cual es un caso particular de (2) y es bien conocido que tiene solución exacta [1]; mientras que la parte imaginaria es la que más va cambiando conforme crece el número de modo.

Podemos observar que la parte imaginaria de cada número de modo de la Tabla IV es el doble de la parte imaginaria de cada número de modo de la Tabla III hasta el modo 8, a partir del cual las frecuencias de la Tabla IV exhiben un cambio drástico en su comportamiento. Cabe mencionar que los casos en los que no es exactamente el doble, es por la precisión perdida al redondear a tres cifras después del punto. Esto va de acuerdo con que las constantes a y b de la Tabla IV son el doble de aquéllas de la Tabla III. Esto nos dice que el decaimiento exponencial de las ondas para el sistema representado por el potencial (2) en donde $a = b = 1/10$ es el doble del decaimiento de las ondas para el sistema en que $a = b = 1/20$.

Podemos concluir que las coincidencias en los espectros de frecuencias cuasinormales obtenidos numéricamente a partir de ambos métodos diferentes son una excelente aproximación al valor real al menos a tres cifras después del punto decimal, pues estos métodos son dos formas totalmente distintas de abordar el problema: IAIM está basado en el Cálculo Diferencial, a través de las series de Taylor; mientras que el método pseudoespectral es meramente algebraico: el planteamiento del problema es completamente diferente y coinciden.

AGRADECIMIENTOS

Nuestros agradecimientos al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por el apoyo financiero brindado a J. Jaimes-Najera; también a la Escuela Superior de Física y Matemáticas y a la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional, por el apoyo brindado para este proyecto.

REFERENCIAS

- [1] E. Berti, V. Cardoso and A. O. Starinets, “Quasinormal modes of black holes and black branes”, *Class. Quant. Grav.*, vol. 26, 163001, 2009.
- [2] L. M. Trefethen, “Spectral Methods in Mathlab”, SIAM, 2000.
- [3] F. Tisseur and K. Meerbergen, “The Quadratic Eigenvalue Problem”, *SIAM*, vol. 43, 235, 2001.
- [4] H. Ciftci, R. L. Hall and N. Saad, “Asymptotic iteration method for eigenvalue problems”, *Phys. A*, vol. 36, 11807, 2003.
- [5] H. Ciftci, R. L. Hall and N. Saad, “Perturbation theory in a framework of iteration methods”, *Phys. Lett. A*, vol. 340, 388, 2005.

- [6] T. Barakat, “The Asymptotic Iteration Method for Dirac and Klein-Gordon equations with a linear scalar potential”, *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 21, 4127, 2006.
- [7] H. T. Cho, A. S. Cornell, J. Doukas and W. Naylor, “Black hole quasinormal modes using the asymptotic iteration method”, *Class. Quant. Grav.*, vol. 27, 155004, 2010.