Cardano-Tartaglia y las soluciones directas a la ecuación de 3er grado

E. Salinas-Hernández[1], G. Ares de Parga[2], César R. Martínez García[1]
[1]Departamento de Formación Básica, ESCOM-IPN, México D.F., México
[2]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55041 E-mail: esalinas@ipn.mx

Resumen —En este trabajo usaremos el cambio del tipo z=x+β, para transformar la ecuación algebraica de tercer grado a otra más sencilla de trabajar, para simplificarla al eliminar uno de sus términos(el término libre) y luego al aplicar el método de Cardano – Tartaglia, lograr obtener las tres soluciones de la ecuación de tercer grado de forma directa.

Palabras Clave – Ecuación cubica,**Cardano-Tartaglia.**

I. Introducción

Las soluciones a las ecuaciones algebraicas de tercer grado [1], [2] aparecen publicadas por primera vez en el libro Ars Magna en 1545 [3] una obra publicada por Gerolamo Cardano, en donde curiosamente también se publicaron las soluciones a la ecuación de cuarto, aunque cabe señalar que las soluciones a la ecuación de tercer grado había sido proporcionada previamente por Niccolo Fontana (Tartaglia), debido a la confianza que tenía en él, puesto que se sabía que que Cardano fue su mentor. Ya con el paso del tiempo se dio a conocer el gran conflicto que incluso es histórico, que sostuvieron precisamente entre Gerolamo Cardano y Tartaglia precisamente por un malentendido en donde Tartaglia le reclama a Cardano de haber publicado sus soluciones a la ecuación de 3er grado sin su consentimiento. Aunque Cardano sostuviera que ya contaba con dichas soluciones y que se las había proporcionado Antonio María del Fiore, que por cierto a su vez la recibió de Scipione del Ferro años atrás.

A continuación se presenta la forma de cómo Cardano-Tartaglia abordaron la solución a la ecuación de 3er grado

$$Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0 \tag{1.1}$$

que puede ser llevado a su forma reducida

$$y^3 + py + q = 0 \tag{1.2}$$

al aplicar la transformación $z = y - \frac{B}{3A}$, y luego de unos ingeniosos pasos, (un desarrollo similar y completo se presenta en el **Apéndice** al final del trabajo), es posible obtener la primera solución real de la ecuación cúbica de acuerdo con el método de Cardano-Tartaglia.

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Considerando el discriminante positivo:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$$

Se sabía que las otras dos raíces se obtienen multiplicando cada una delas raíces cúbicas por las raíces cúbicas primitivas de la unidad, es decir, obtenemos las otras 2 raíces cúbicas de la unidad

$$u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

y.

$$v = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Después de una manipulación algebraica de la ecuación cúbica reducida podemos llegaren las tres raíces que son las reportadas en la literatura:

$$y_1 = u + v$$
$$y_2 = \frac{1}{2}(u + v) + \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v)i$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(u+v) - \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)i \qquad (1.3)$$

En otras palabras, la solución de (1.1) es

$$z_1 = y_1 - \frac{B}{3A} = u + v - \frac{B}{3A}$$

$$z_2 = y_2 - \frac{B}{3A} = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)i - \frac{B}{3A}$$

$$z_3 = y_3 - \frac{B}{3A} = \frac{1}{2}(u+v) - \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)i - \frac{B}{3A}$$

(1.4)

En este trabajo pudimos obtener directamente las tres soluciones a la ecuación de 3er grado, usando la transformación z = x + β y eliminando el término libre de la nueva ecuación, al aplicar el método desarrollado por Cardano −Tartaglia.

II. Propuesta para obtener las soluciones directas a la ecuación de tercer grado

Partamos de la ecuación de 3er grado en su forma general, y propongamos la siguiente transformación z = x+β, la cual se modifica a la ecuación a una más accesible de resolver. Para ello vamos a imponer que el término libre de la ecuación transformada se elimine aplicando al aplicar el método tradicional de Cardano − Tartaglia, es decir:

A partir de la ecuación

$$Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0 \qquad (2.1)$$

considerese la transformación z = x + β, entonces (2.1) se modifica de la siguiente manera:

$$Ax^3 + (3A\beta + B)x^2 + (3A\beta^2 + 2\beta B + C)x + \underbrace{A\beta^3 + B\beta^2 + C\beta + D}_{Termino\ libre} = 0 \qquad (2.2)$$

de la ecuación anterior, si imponemos que

$$A\beta^3 + B\beta^2 + C\beta + D = 0 \qquad (2.3)$$

Lo cual se resuelve aplicando el método de Cardano−Tartaglia, ver el **Apéndice** al final de la Nota.

Volviendo a 2.2 esto se reduce a :

$$Ax^3 + (3A\beta + B)x^2 + (3A\beta^2 + 2\beta B + C)x = 0 \qquad (2.4)$$

La ecuación anterior es muy sencilla de resolver, señalando que precisamente ésta es la ventaja de nuestro método, de hecho se puede ver de inmediato que la primera solución es $x_1 = 0$, mientras que las otras dos soluciones se pueden obtener de la expresión cuadrática:

$$Ax^2 + (3A\beta + B)x + (3A\beta^2 + 2\beta B + C) = 0 \qquad (2.5)$$

Aplicando la fórmula general a la ecuación de 2do grado:

$$x_2 = \frac{-(3A\beta + B)}{2A} + \frac{\sqrt{(3A\beta + B)^2 - 4A(3A\beta^2 + 2B\beta) + C}}{2A}$$

Y

$$x_3 = \frac{-(3A\beta + B)}{2A} - \frac{\sqrt{(3A\beta + B)^2 - 4A(3A\beta^2 + 2B\beta) + C}}{2A}$$

Luego, las soluciones a la ecuación (2.1), recordando la transformación $z = x + \beta$, y también utilizando el valor de β calculado en el **Apéndice**, estas vienen dadas por:

$$z_1 = x_1 + \beta = 0 + \beta = \beta$$

$$z_2 = x_2 + \beta = \frac{-(3A\beta + B)}{2A} + \frac{\sqrt{(3A\beta + B)^2 - 4A(3A\beta^2 + 2B\beta) + C}}{2A} + \beta$$

$$z_3 = x_3 + \beta = \frac{-(3A\beta + B)}{2A} - \frac{\sqrt{(3A\beta + B)^2 - 4A(3A\beta^2 + 2B\beta) + C}}{2A} + \beta \tag{2.6}$$

con

$$\beta = u + v - \frac{B}{3A} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} - \frac{p^3}{27}}} - \frac{B}{3A} \tag{2.7}$$

de acuerdo al **Apéndice**.

Es decir, de forma natural obtenemos las tres soluciones de la ecuación (2.1), que no se da en la construcción original realizada por Cardano − Tartaglia. El método de Cardano-Tartaglia sólo puede dar la solución real siempre que como $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, ya que las otras dos soluciones se buscan partiendo de las raíces complejas de unidad, lo que claramente difiere en este trabajo. El camino que hemos hecho para las dos últimas soluciones es totalmente diferente del reportado porel camino tradicional, de hecho, se puede observar que nuestras últimas dos soluciones tienen una estructura diferente a las reportadas en la literatura.

III. Ejemplo

Consideré la siguiente ecuación:

$$4 - 2z - 3z^2 + z^3 = 0 \tag{E1}$$

Ahora considere el cambio z=x+β, donde β esta dado por ec. (2.7); luego entonces

$$\mathrm{p} = \frac{B^2}{3A^2} + \frac{C}{A} = \frac{(-3)^2}{3(1)^2} + \frac{-2}{1} = 1$$

y

$$\mathrm{q} = \frac{2B^3}{27A^3} + \frac{BC}{3A^2} + \frac{D}{A} = \frac{2(-3)^3}{27(1)^3} + \frac{(-3)(-2)}{3(1)^2} + \frac{4}{1} = 4$$

Con p y q y calculados, podemos pasar a calcular β;

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{(4)^2}{4} + \frac{(1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{(4)^2}{4} + \frac{(1)^3}{27}}} - \frac{-3}{3(1)} = 1$$

Así entonces, con el cambio z=x+1, la ec (E1) se reduce a la forma:

$$-5x + x^3 = 0$$

La cual se puede factorizar como

$$x(-5 + x^2) = 0$$

Cuyas raíces son x_1=0, x_2=$\sqrt{5}$ y x_3=$-\sqrt{5}$

De esta manera que la raíces la calculamos como:

$$z_1 = x_1 + \beta = 1$$

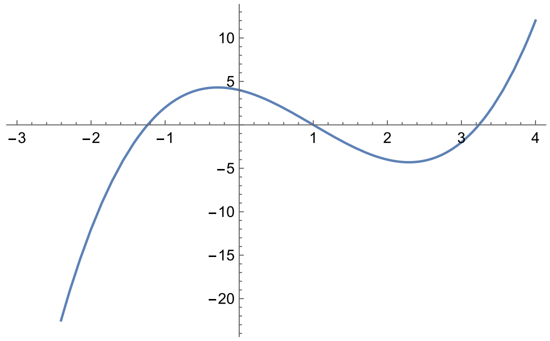
Y

$$z_2 = x_2 + \beta = 1 + \sqrt{5}$$

$$z_3 = x_3 + \beta = 1 - \sqrt{5}$$

De donde x_2 y x_3, están dador por (2.6)

Esto lo podemos ver gráficamente:



IV. CONCLUSIONES

En este trabajo proponemos un mecanismo para obtener las tres soluciones a la ecuación de 3er grado, de manera directa; al emplear el método de Cardano-Tartaglia, a el término libre una vez que se transforma la ecuación original de 3er grado.

V.REFERENCIAS

[1] Guillermo Pastor, “Ecuaciones de tercer grado y cuarto grado: Teorema del Tulipan”, Miscelanea Matemática, 21, 21-28(1994)

[2] V. Uspensky, “Teoría de ecuaciones”, Editorial Limusa (1987) pagina 387

[3] Gerolano Cardano, “Artis Magnae, sirve de reugulis algebraisis”, (1545) Italia, en Latín

[4] Smith, David Eugene; Latham, Marcia L., “Geometrie: TheGeometryof Rene Descartes”, Editorial: Open Court Pub Co, 1925, ISBN 10:087548168X/ ISBN 13:9780875481685

[5] Joseph Liouville, “OuRecueil Mensuel de Mémoires Sur Les Diverses Parties Des mathématiques”, (ClassicReprint) (francés) Pasta blanda, 25 noviembre 2018.

[6] A. I. Kostrikin “Introducción al Álgebra”, Editorial MIR

VI.APENDICE

Aplicación del método de Cardano Tartaglia

$$A\beta^3 + B\beta^2 + C\beta + D = 0 \tag{A.1}$$

Primero aplicaremos la transformación $\beta = y - \frac{B}{3A}$, a la ecuación anterior y realizando algunos cálculos obtenemos:

$$y^3 + \left(\frac{B^2}{3A^2} + \frac{C}{A}\right)y + \frac{2B^3}{27A^3} + \frac{BC}{3A^2} + \frac{D}{A} = 0 \tag{A.2}$$

si definimos

$$p = \frac{B^2}{3A^2} + \frac{C}{A} \text{ y } \quad q = \frac{2B^3}{27A^3} + \frac{BC}{3A^2} + \frac{D}{A}$$

obtenemos

$$y^3 + py + q = 0 \tag{A.3}$$

luego al realizar otra transformación y = u+v, y con un poco de álgebrase puede llevar a cabo para

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0 \tag{A.4}$$

pues, según Cardano − Tartaglia al imponer que

$$3uv + p = 0 \Rightarrow u = -\frac{p}{3v}$$

entonces al sustituir en la expresión (A.4) sin el término$(u+v)(3uv+p)$

$$u^3 + v^3 + q = 0 \tag{A.5}$$

Esto se reduce a

$$-\frac{p^3}{27v^3} + v^3 + q = 0 \Rightarrow v^6 + qv^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

haciendo el cambio de variable $w = v^3$, entonces la expresión se puede llevar a una forma cuadrática

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$$

Las soluciones son

$$w_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}, \quad w_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}$$

Ahora tomando, $v^3 = w$,en la ecuación anterior considerando el signo +.

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}$$

Sustituyendo en (A.5) para la variable u.

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}$$

Entonces y,lo obtenemos como:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}$$

Y la solución real para (A.1) estará dada por:

$$\beta = y - \frac{B}{3A} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{B}{3A}$$

Siempre que $\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27} > 0$