

Estados cuánticos sin continuidad

K Y Gordillo-Rivas¹, J Morales-Tellez² J J Peña Gil², E Leticia Arcos Díaz¹ J García-Ravelo¹

¹Instituto Politécnico Nacional, ESFM, Ciudad de México, México

²CBI Área de Física Atómica Molecular Aplicada, UAM-AZC, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 E-mail: jegarcia@ipn.mx

Resumen – Se considera una partícula cuántica sujeta a la acción del potencial singular $V(x) = \sum_{i=0}^2 \alpha_i h^{(i)}(x)$, donde $h^{(i)}(x)$ representa la derivada de orden- i del escalón unitario. Se demuestra sin suponerlo de antemano, que tanto el estado cuántico como su primera derivada, son discontinuas en el origen.

Abstract- We consider a quantum particle with interaction potential $V(x) = \sum_{i=0}^2 \alpha_i h^{(i)}(x)$, where $h^{(i)}(x)$ is the i -order derivative of unit step. We show that the quantum state and its first derivative are discontinuous at the origin.

Palabras Clave – Potencial singular, estados cuánticos, ecuación de Schrödinger, Teoría de distribuciones.

I. INTRODUCCIÓN

En los cursos introductorios de Mecánica Cuántica [1], se considera entre otros, el caso de una partícula sujeta a la acción de un potencial escalón e independientemente, el caso en el que se encuentra bajo la acción de un potencial delta de Dirac, pero la superposición de ambos potenciales no es considerada. La razón es que como veremos, la técnica usualmente empleada, que consiste en integrar a la ecuación de Schrödinger en un intervalo que tiende a cero y que contiene a la singularidad de la delta de Dirac, conduce a estados inconsistentes con las suposiciones hechas de antemano sobre los estados cuánticos.

En este trabajo, sin hacer suposiciones anticipadas de continuidad sobre los estados cuánticos de la partícula, se obtienen sus condiciones de frontera (cf), en el punto donde el potencial de interacción $V(x) = \sum_{i=0}^2 \alpha_i h^{(i)}(x)$, es singular; $h^{(0)}(x)$ representa la función Heaviside y el superíndice i , el orden de derivación. Estas cf, son obtenidas como consecuencia del uso de identidades propias de la Teoría de distribuciones.

En la sección II, se describe el hamiltoniano mencionado. La sección III, discute las limitaciones que tiene la técnica usual para la solución de la ecuación de Schrödinger para este tipo de potenciales. Usando argumentos de la Teoría de distribuciones, la solución de esta ecuación es realizada en la sección IV, destacando sus ventajas respecto a la técnica descrita en la sección III. Finalmente, la sección V contiene conclusiones.

II. OPERADOR HAMILTONIANO

Los estados cuánticos $\Psi(x,t)$ de una partícula de masa m en un espacio unidimensional con hamiltoniano H , satisfacen la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

$$i\hbar \frac{d}{dx} \Psi(x,t) = H \Psi(x,t) \oplus \text{cf.} \quad (1)$$

Para asegurar que los campos $\Psi(x,t)$, representen estados físicos, cf son impuestas sobre estos campos, en regiones o puntos específicos del espacio, consistentes con el potencial de interacción $V(x,t)$. A su vez, estas cf determinan el espectro de energía de la partícula.

Cuando el potencial no depende del tiempo, $\Psi(x,t)$ tiene forma estacionaria

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}; \quad H\psi(x) = E\psi(x) \oplus \text{cf.} \quad (2)$$

De modo que $\Psi(x,t)$, es el producto de dos funciones; la parte espacial $\psi(x)$, es eigenestado de la ecuación de eigenvalores de H y su correspondiente eigenvalor E , aparece en la fase de la parte temporal.

En este trabajo el operador hamiltoniano es

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{\mp}(x), \quad (3)$$

donde

$$V_{\mp}(x) = V_0 h(x) \mp \alpha \delta(x) + \beta \delta'(x); V_0, \alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

definido en todo el eje x , excepto en el origen. La ecuación (2) de eigenvalores es

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V_0 h(x) \psi(x) \mp \alpha \delta \psi(x) + \beta \delta'(x) \psi(x) = E \psi(x), \quad \forall x \neq 0. \quad (5)$$

Los tres parámetros V_0 , α y β del potencial $V_{\mp}(x)$ determinan la intensidad del acoplamiento de la partícula con las fuentes que producen estos potenciales. Este potencial establece que la masa se encuentra sujeta a tres interacciones; una finita en todo el espacio, discontinua en cero, definida por la distribución

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}, \quad (6)$$

llamada *escalón de potencial*. La segunda interacción, llamada *pozo (barrera) delta de Dirac* $V_-(x)(V_+(x))$, singular en cero es definida por la distribución

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Sabemos que ambas distribuciones están relacionadas con la tercera interacción, $\beta\delta'(x)$ mediante

$$\delta'(x) = (h'(x))' = h''(x); \quad \delta'(-x) = -\delta'(x) \quad (8)$$

la cual, siendo antisimétrica, representa una barrera infinita *seguida* de un pozo infinito coexistiendo en $x = 0$. En cualquier caso, del potencial (4), el espectro de energía $E \in (-\infty, \infty)$.

III. SOLUCIÓN ESTÁNDAR

En esta subsección se analiza la forma en que (5) es habitualmente resuelta, destacando algunos aspectos que son pasados por alto. El argumento estándar consiste en integrar (5) sobre un intervalo simétrico al origen

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) dx + V_0 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(x) \psi(x) dx \\ \mp \alpha \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) \psi(x) dx \\ + \beta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta'(x) \psi(x) dx \\ = E \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(x) dx; \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (9)$$

el cual tenderá mediante un proceso al límite a cero. Simultáneamente, se asignan anticipadamente, propiedades de continuidad para $\psi(x)$ y $\psi''(x)$ y de discontinuidad a $\psi'(x)$ en $x = 0$, donde (5) no está definida. Estas condiciones *ad hoc* conducen al resultado (18) previsto. A continuación, cada una de las cinco integrales *son evaluadas*. Ya que anticipadamente $\psi(x)$ se supone continua en el origen, cuatro integrales pueden ser calculadas; dos de ellas se anulan en el proceso al límite

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(x) \psi(x) dx &= \int_0^{\varepsilon} \psi(x) dx \rightarrow 0_{\varepsilon \rightarrow 0}, \\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(x) dx &\rightarrow 0_{\varepsilon \rightarrow 0}, \end{aligned} \quad (10)$$

y las otras

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) \psi(x) dx = \psi(0), \quad (11)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta'(x) \psi(x) dx = -\frac{\psi'(0^+) + \psi'(0^-)}{2}, \quad (12)$$

no en general, y no dependen del proceso al límite. En la última integral, se usaron las identidades

$$\delta'(x) \psi(x) = \frac{\psi(0^+) + \psi(0^-)}{2} \delta'(x) - \frac{\psi'(0^+) + \psi'(0^-)}{2} \delta(x),$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta'(x) dx = 0, \quad (13)$$

y también de antemano, la suposición de que $\psi'(x)$ es discontinua en $x = 0$. La integral restante debería ser realizada con mayor cuidado, cuando el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) pretende ser usado. Definimos

$$F(x) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi''(x) dx. \quad (14)$$

Si suponemos anticipadamente que $\psi''(x)$ es continua, entonces por el TFC escribimos

$$F'(x) = \psi''(x), \quad \frac{d}{dx} (F(x) - \psi'(x)) = 0, \quad (15)$$

de modo que

$$F(x) = \psi'(x) + C = \psi'(x) - \psi'(-\varepsilon), \quad (16)$$

donde la constante C se obtiene del hecho $F(-\varepsilon) = 0$ según (14).

Por lo tanto, la primera integral de (9) se presenta como

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi''(x) dx = \psi'(x)|_{\varepsilon} - \psi'(x)|_{-\varepsilon} \\ &\rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi'(0^+) - \psi'(0^-). \end{aligned} \quad (17)$$

Esta integral queda planteada así, porque se supone nuevamente, sin argumento alguno, que $\psi'(x)$ es discontinua en el origen. De esta manera, sustituyendo (10), (11), (12) y (17) en (9), se garantiza el resultado al que se quiere llegar

$$\begin{aligned} \psi'(0^+) [\hbar^2 + m\beta] - \psi'(0^-) [\hbar^2 - m\beta] \\ = \mp 2\alpha m \psi(0), \end{aligned} \quad (18)$$

con el que se determinará, el espectro de energía E de (5).

De esta manera, las suposiciones de continuidad impuestas *a priori* para $\psi(x)$ y $\psi''(x)$ y de discontinuidad para $\psi'(x)$ en $x = 0$, conducen

$$\begin{pmatrix} \psi(0^+) \\ \psi'(0^+) \end{pmatrix} = \frac{1}{\hbar^2 + m\beta} \begin{pmatrix} \hbar^2 + m\beta & 0 \\ \mp 2\alpha m & \hbar^2 - m\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(0^-) \\ \psi'(0^-) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Cuando (5) es resuelta sin integrarla, y sobre todo, sin introducir condiciones de continuidad *a modo*, mostraremos en la siguiente sección que:

- Estas cf (19) son incorrectas, a menos que $\beta = 0$.
- El estado cuántico para $E < 0$ es

$$\psi(x) \sim \begin{cases} \frac{\hbar^2 + m\beta}{\hbar^2 - m\beta} e^{\kappa_1 x}, & x < 0 \\ e^{-\kappa_2 x}, & x > 0 \end{cases}. \quad (20)$$

La ecuación anterior muestra que contrariamente a lo supuesto, $\psi''(x)$ no es continua en el origen; $\psi''(0^-) = \frac{\hbar^2 + m\beta}{\hbar^2 - m\beta} (\kappa_1)^2 \neq (\kappa_1)^2 = \psi''(0^+)$. Esto significa que el uso del TFC deja de ser válido a menos que $V_0 = \beta = 0$, pues bajo estas circunstancias, de acuerdo con (43) y (44), κ_1 y κ_2 coinciden.

IV. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

La discontinuidad del potencial $V_{\mp}(x)$ en $x = 0$, es más que evidente, por ello proponemos escribir $\psi(x)$ de una forma sugerente

$$\psi(x) = f_1(x)h(-x) + f_2(x)h(x), \quad (21)$$

donde las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones reales desconocidas por determinar, continuas por lo menos hasta en su segunda derivada, en todo el eje espacial x . Una vez determinadas, dos circunstancias podrían ocurrir:

$$\text{que } f_1(0) = f_2(0) \Rightarrow \psi(x) \text{ es continua en } 0, \quad (22)$$

$$\text{que } f_1(0) \neq f_2(0) \Rightarrow \psi(x) \text{ es discontinua en } 0. \quad (23)$$

Tomando en cuenta (21) escribimos

$$\begin{aligned} \rho(x) \equiv |\Psi(x,t)|^2 &= |f_1(x)h(-x) + f_2(x)h(x)|^2 \\ &= |f_1(x)|^2 h(-x) \\ &\quad + |f_2(x)|^2 h(x), \end{aligned} \quad (24)$$

donde se ha hecho uso de

$$h^2(\pm x) = h(\pm x), \quad h(-x)h(x) = 0, \quad (25)$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^0 |f_1(x)|^2 dx \\ &\quad + \int_0^{\infty} |f_2(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (26)$$

La primera y segunda derivadas de $\psi(x)$ son

$$\psi'(x) = f_1'(x)h(-x) - f_1(x)\delta(-x) + f_2'(x)h(x) + f_2(x)\delta(x), \quad (27)$$

y

$$\psi''(x) = f_1''(x)h(-x) + f_2''(x)h(x) + 2[-f_1'(x) + f_2'(x)]\delta(x) + [-f_1(x) + f_2(x)]\delta'(x), \quad (28)$$

respectivamente. Note el uso de la simetría de $\delta(x)$ y la antisimetría de $\delta'(x)$. Mediante el par de identidades

$$\begin{aligned} \Phi(x)\delta(x) &= \Phi(0)\delta(x), \quad \Phi(x)\delta'(x) = \Phi(0)\delta'(x) \\ &\quad - \Phi'(0)\delta(x), \end{aligned} \quad (29)$$

el miembro derecho de (28) queda como

$$\psi''(x) = f_1''(x)h(-x) + f_2''(x)h(x) + [-f_1'(0) + f_2'(0)]\delta(x) + [-f_1(0) + f_2(0)]\delta'(x). \quad (30)$$

El segundo término del lado izquierdo de (5) es

$$V_0 h(x)\psi(x) = V_0 h(x)[f_1(x)h(-x) + f_2(x)h(x)] = V_0 f_2(x)h(x), \quad (31)$$

como consecuencia de (25).

El tercer término del lado izquierdo de (5) es

$$\begin{aligned} \mp \alpha \delta(x)\psi(x) &= \mp \alpha \delta[f_1(x)h(-x) + f_2(x)h(x)] \\ &= \mp \frac{\alpha}{2} (f_1(0) + f_2(0))\delta(x), \end{aligned} \quad (32)$$

debido a la identidad

$$\varphi(x)\delta(x) = \frac{\varphi(0^-) + \varphi(0^+)}{2} \delta(x). \quad (33)$$

Finalmente, el cuarto término del lado izquierdo de (5) es

$$\begin{aligned} \beta \delta'(x)\psi(x) &= \beta \delta'(x)[f_1(x)h(-x) + f_2(x)h(x)] = \\ &= \beta \left(\left(\frac{f_1(0) + f_2(0)}{2} \right) \delta'(x) - \left(\frac{f_1'(0) + f_2'(0)}{2} \right) \delta(x) \right), \end{aligned} \quad (34)$$

en acuerdo con (13).

Tomando en cuenta (30), (31), (32) y (34) para el miembro izquierdo de la ecuación estacionaria de Schrödinger (5) y (21) en el lado derecho, tenemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m} [f_1''(x)h(-x) + f_2''(x)h(x) + [-f_1'(0) + f_2'(0)]\delta(x) \\
& \quad + [-f_1(0) + f_2(0)]\delta'(x)] + V_0 f_2(x)h(x) \\
& \quad \mp \frac{\alpha}{2} (f_1(0) + f_2(0))\delta(x) \\
& \quad + \beta \left(\left(\frac{f_1(0) + f_2(0)}{2} \right) \delta'(x) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{f_1'(0) + f_2'(0)}{2} \right) \delta(x) \right) \\
& = E[f_1(x)h(-x) + f_2(x)h(x)]; \forall x. \quad (35)
\end{aligned}$$

Note que esta ecuación incluye al origen y en la (5) lo excluye.

Como es usual, vamos a considerar que las distribuciones que aparecen en nuestra ecuación estacionaria de Schrödinger (35) son independientes entre sí. Consecuentemente, (2) se desdobra en el siguiente conjunto de cuatro ecuaciones

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f_1''(x) = E f_1(x); \forall x \quad (36)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f_2''(x) + V_0 f_2(x) = E f_2(x); \forall x, \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m} [-f_1'(0) + f_2'(0)] \mp \frac{\alpha}{2} (f_1(0) + f_2(0)) \\
& \quad - \frac{\beta}{2} (f_1'(0) + f_2'(0)) = 0, \quad (38)
\end{aligned}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [-f_1(0) + f_2(0)] + \frac{\beta}{2} (f_1(0) + f_2(0)) = 0. \quad (39)$$

La cuarta ecuación conduce a

$$f_1(0)(m\beta + \hbar^2) + f_2(0)(m\beta - \hbar^2) = 0, \quad (40)$$

lo que establece que $f_1(0) \neq f_2(0)$, así que por (23), $\psi(x)$ es discontinua en el origen. La tercera ecuación, muestra con la ayuda de (40), la discontinuidad de la primera derivada en dicho punto

$$\begin{aligned}
& f_2'(0)(m\beta + \hbar^2) + f_1'(0)(m\beta - \hbar^2) \\
& = \mp \alpha m (f_1(0) + f_2(0)) \\
& = \mp \frac{2\alpha m \hbar}{\hbar^2 - m\beta} f_1(0). \quad (41)
\end{aligned}$$

En términos de $\psi(x)$ (21), estas cf de (40) y (41) establecen que en el origen se cumple [2]

$$\begin{pmatrix} \psi(0^+) \\ \psi'(0^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 + m\beta}{\hbar^2 - m\beta} & 0 \\ \mp \frac{2\alpha m}{\hbar^4 - m^2\beta^2} & \frac{\hbar^2 - m\beta}{\hbar^2 + m\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(0^-) \\ \psi'(0^-) \end{pmatrix};$$

$$\beta \neq \frac{\hbar^2}{m}. \quad (42)$$

Son varias las observaciones que desde este resultado pueden ser hechas:

- Note que $\beta = 0$ confirma el caso (22); $\psi(x)$ es continua en el origen y su derivada no

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \mp \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(0), \quad (43)$$

consistentemente con (19).

- Las ecuaciones (36) y (37) al ser resueltas, determinan $f_1(x)$ y $f_2(x)$, es decir, la parte espacial $\psi(x)$ del estado estacionario $\Psi(x,t)$ (2); el potencial escalón a través de su parámetro V_0 únicamente afecta a la función $f_2(x)$.
- Sin haberlo supuesto *a priori*, (40) impone cf sobre el estado $\psi(x)$ en el origen y (41), la discontinuidad de $\psi'(x)$, en dicho punto; la de $\psi(x)$ la determina β y la de $\psi'(x)$, los parámetros $\mp\alpha$ y β .

A. Estado acotado

Por inspección del potencial $V_{\mp}(x)$, el rango de valores del espectro de energía de H es $E \in (-\infty, \infty)$. Considerando que $E < 0$ en (5) o equivalentemente en (35), las soluciones generales de (36) y (37) son

$$f_1(x) = A e^{-\kappa_1 x} + B e^{\kappa_1 x}; \quad \kappa_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{-2mE}, \forall x, \quad (44)$$

y

$$f_2(x) = C e^{-\kappa_2 x} + D e^{\kappa_2 x};$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{-2m(E - V_0)}, \forall x, \quad (45)$$

respectivamente. Cuando (21) es considerada en (5) con (44) y (45)

$$\Psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar} \begin{cases} A e^{-\kappa_1 x} + B e^{\kappa_1 x}, & x < 0 \\ C e^{-\kappa_2 x} + D e^{\kappa_2 x}, & x > 0 \end{cases} \quad (46)$$

A continuación, puesto que esta solución admite la restricción $\psi(\pm\infty) = 0$, tenemos ($A = D = 0$)

$$\Psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar} \begin{cases} B e^{\kappa_1 x}, & x < 0 \\ C e^{-\kappa_2 x}, & x > 0 \end{cases} \quad (47)$$

Además, de la discontinuidad $\psi(0^+) = \left(\frac{\hbar^2 + m\beta}{\hbar^2 - m\beta} \right) \psi(0^-)$

$$\Psi(x,t) = Be^{-iEt/\hbar} \begin{cases} \left(\frac{\hbar^2 + m\beta}{\hbar^2 - m\beta} \right) e^{\kappa_1 x}, & x < 0 \\ e^{-\kappa_2 x}, & x > 0 \end{cases}, \quad (48)$$

y tomando en cuenta (26)

$$B = \left[\left(\frac{\hbar^2 + m\beta}{\hbar^2 - m\beta} \right)^2 \frac{1}{2\kappa_1} + \frac{1}{2\kappa_2} \right]^{-1/2}. \quad (49)$$

De las condiciones (42), la discontinuidad de $\psi'(x)$ en cero, conduce a la ecuación trascendente para el espectro de energía

$$-\kappa_2 - \kappa_1 = \mp \frac{2\alpha m}{(m\beta - \hbar^2)^2}. \quad (50)$$

La naturaleza trascendente de esta ecuación persiste, aún en el caso $\beta = 0$

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \pm \frac{2\alpha m}{\hbar^2}. \quad (51)$$

Introducimos la notación $y \equiv -2mE$, $y_0 \equiv 2mV_0$ para identificar el miembro izquierdo de (51) como la función

$$z_1(y) = \sqrt{y} + \sqrt{y_0 + y}; 0 < y \leq \infty, \quad (52)$$

y el miembro derecho como la función constante $z_2(y) = \pm 2m\alpha/\hbar^2$. La Fig. 1 muestra las gráficas de las funciones $z_2 = 1, \sqrt{2}, 1.8$, las cuales corresponden a $m\alpha = \hbar^2/\sqrt{2}, \hbar^2/\sqrt{2}, 1.8\hbar^2/\sqrt{2}$, respectivamente. También la gráfica de la función (52) cuando $mV_0 = 1$. Se advierte que ambas gráficas se intersecan cuando $z_2 \geq \sqrt{2}$. Para el caso del potencial $V_-(x) = V_0 h(x) - \alpha \delta(x)$, solo un estado acotado es obtenido, cuando se cumple $z_2 \geq \sqrt{y_0}$ o equivalentemente cuando las constantes de acoplamiento satisfacen

$$2m\alpha/\hbar^2 \geq \sqrt{2mV_0}. \quad (53)$$

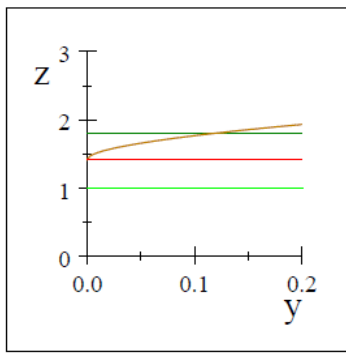


Fig. 1

V. CONCLUSIONES

Hemos resuelto la ecuación de eigenvalores de Schrödinger (5) con el potencial $V(x) = \sum_{i=0}^2 a_i h^{(i)}(x)$, desde dos puntos de vista diferentes. En el descrito en la sección III, se hace uso del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), lo que obliga a suponer de antemano, la continuidad de $\psi''(x)$ e inmediatamente imponer la discontinuidad de $\psi'(x)$ en el origen. Para evitar contradecir las suposiciones hechas *a priori* sobre la continuidad de $\psi(x)$ y $\psi''(x)$, se muestra que que el uso del TFC es solamente consistente para el caso en el que $V_0 = \beta = 0$. Por el contrario, la solución descrita en la sección IV, en base al uso de resultados de la Teoría de distribuciones, permite resolver el problema sin tales inconsistencias.

La siguiente tabla resume algunas de estas observaciones

TABLA I.		
	Sec. III	Sec. IV
cont. $\psi(x)$	$x = 0$	--
cont. $\psi''(x)$	$x = 0$	--
discont. $\psi'(x)$	$x = 0$	--

TFC	aplica ($V_0 = \beta = 0$)	no aplica

V_0	(Si $\neq 0 \Rightarrow \psi$ y ψ'' discont.)	$\neq 0$

α	$\neq 0$	$\neq 0$

β	0	$\neq 0$
	(Si $\neq 0 \Rightarrow \psi$ y ψ'' discont.)	

AGRADECIMIENTOS

Proyecto SIP 20220073. COFAA-IPN. EDI-IPN. BEIFI-SIP-IPN. SNI-Conacyt.

REFERENCIAS

- [1] W. Greiner, "Quantum Mechanics an introduction", Springer, fourth edition, 2000.
- [2] M. Gadella, J. Negro, L.M. Nieto, "Bound states and scattering coefficients of the $-a\delta(x) + b\delta'(x)$ potential", Physics Letters A 373, 2009, 1310-1313.