

Lugares geométricos de trayectorias de proyectil bajo la acción de fricción polinomial en la velocidad

Hugo Hernández-Saldaña

Departamento de Ciencias Físicas, Universidad Autónoma Metropolitana en Azcapotzalco, México D.F., México
Teléfono (55) 5318-9575 E-mail: hhs@azc.uam.mx

Resumen — El problema del lugar geométrico (o locus) generado por alguna condición en la trayectoria de una masa puntual bajo la acción de la gravedad forma parte de los cursos standard de física de nivel universitario y preuniversitario. No obstante, en las últimas décadas muchos resultados analíticos para el caso con fricción dinámica han aparecido en la literatura. La mayoría se presenta en lengua inglesa, incluidos los del autor. En este breve trabajo resumimos algunos resultados: 1) El lugar geométrico de los máximos de los tiros lanzados a un ángulo dado bajo la acción de una fuerza de fricción proporcional a la velocidad. 2) El mismo locus pero con fricción Coulombiana. 3) La hodógrafa de los diversos casos de fricción como una expansión en serie de la velocidad. 4) La velocidad de arrastre en los casos en los que la fricción depende de alguna potencia de la rapidez. Los ejemplos presentados dan cuenta de que el problema de un cuerpo bajo la acción del campo gravitacional y una fricción dependiente de la velocidad admite soluciones analíticas. Los resultados analíticos presentados son interesantes independientemente de los resultados experimentales.

Palabras Clave – fricción, locus, trayectoria

Abstract — The study of locus in the problem of a point mass under the action of gravity is part of the pre and university curricula. However, analytical results on the case with friction appeared during the last decades. Unfortunately there is a lack of presentations in Spanish. Here, we present several of them in Spanish: 1) The locus formed by the apex of all the trajectories with the initial angle of throw as variable and in presence of velocity dependent friction. 2) The same locus but with Coulomb friction. 3) The hodograph of the several solvable cases of a friction in a series expansion of the velocity. 4) The drag velocity in the same cases presented before. These examples are part of the kind of analytical results obtainable under general conditions of the drag or friction force. These analytical results are interesting no matter the experimental implementations.

Keywords — friction, locus, trajectory

I. INTRODUCCIÓN

El problema de tiro parabólico es ubicuo en los cursos de física pre-universitaria o universitaria [1-8]. En éstos problemas, además de la ubicación de algún punto en particular en el espacio y tiempo en ocasiones también se analizan algunos lugares geométricos definidos por alguna condición, como es el caso de la envolvente. La versión con

fricción dependiente de la velocidad es menos usual en las currícula, pero no deja de ser importante, tanto sus soluciones como la búsqueda del locus. Por su sencillez, en los problemas que involucran pérdida de energía se aplica la fricción seca o de Coulomb [1,2].

Durante las últimas décadas algunas propiedades interesantes han surgido de los problemas con fricción haciendo uso de una aproximación analítica o de la solución completamente analítica [9-13]. Entre los resultados se puede mencionar el locus de los ápices de la trayectoria [14-18]. Por supuesto, algunos tratamientos requieren del uso de métodos numéricos. Aún cuando algunas de las propiedades o resultados tienen verificación experimental y son usados dentro de las prácticas en los laboratorios universitarios, aquí abordaremos únicamente el aspecto teórico.

II. METODOLOGÍA

La manera standard de resolver los problemas de una partícula pequeña de masa m bajo la acción de la fuerza gravitacional y de una fricción es escribir las ecuaciones de Newton en coordenadas cartesianas y resolver el sistema de ecuaciones diferenciales. En el caso de fricción proporcional a la velocidad las ecuaciones están desacopladas y no es problema encontrar las soluciones. En otros casos no es evidente que las ecuaciones se desacoplen y menos si no sabemos si éstas tienen o no solución en términos de funciones elementales. Sin embargo, una manera natural de escribir las ecuaciones es usar la longitud de arco como variable en lugar del tiempo. Al pasar a un sistema de referencia como el de Frenet-Serret, la fuerza de fricción es antiparalela a la velocidad no importa la orientación de la trayectoria, así, de manera natural podemos plantearnos una fuerza de fricción general que pueda ser expandida en serie de potencias. De hecho, esta aproximación permite en primera instancia analizar la hodógrafa de velocidad del problema. Ésta gráfica consiste en escribir las componentes de la velocidad y es de mucha utilidad en meteorología. Así, una vez resuelta la ecuación de la hodógrafa, tendremos las velocidades en términos de un radio y un ángulo. Cuáles de éstas ecuaciones se pueden resolver o no está entre los pendientes, pero las soluciones analíticas existen para dos problemas que han sido los ejemplos usuales para analizar fricción: la fricción seca o de Coulomb y la fricción hidrodinámica en la aproximación de dependencia lineal de la velocidad. La importancia que esto tiene para la enseñanza

de las fuerzas de fricción será discutida brevemente en la sección de RESULTADOS..

Así, resolveremos las ecuaciones de Newton en el marco de Frenet-Serret para una fuerza polinomial en la velocidad y obtendremos las ecuaciones de la hodógrafa, misma que mostraremos las soluciones analíticas posibles para la ecuación genérica,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\hat{j} + \vec{f}(\vec{v}), \quad (1)$$

que depende de la velocidad y una fuerza de fricción que es función general de la velocidad. Dicha función la especificaremos más adelante. Nos concentraremos en los casos usuales para discutir la existencia de loci y algunas otras peculiaridades. Dado que el presente trabajo está enfocado a una presentación cuasi-elemental para estudiantes de los primeros años universitarios daremos algunas ecuaciones poco útiles pero ilustrativas de la manera en que se va aproximando a soluciones aceptables.

III. RESULTADOS

A. Ecuaciones de Newton y fricción generalizada

El problema que nos proponemos abordar es tan añejo que uno pensaría que no hay más qué decir al respecto de él, no obstante las referencias con aspectos novedosos se han ido acumulando. Iniciamos con las ecuaciones de Newton en dos dimensiones

$$m \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_x(\vec{v}) \\ f_y(\vec{v}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde hemos escrito explícitamente las coordenadas cartesianas x y y . El tamaño del peso es mg como es usual. La fricción la hemos asumido que será una función de potencias de la velocidad, incluido el término constante. Así se podrá escribir como

$$\vec{f}(\vec{v}) = -mg(b_0\hat{v} + b_1\vec{v} + b_2v^2\hat{v} + \dots) \quad (3)$$

Aquí las constantes de fricción llevan un subíndice que indica la potencia de la velocidad a la que está asociada, por lo que tienen unidades diferentes. Aquí tomaremos diferentes términos del desarrollo en Taylor para ir analizando.

B. Fricción proporcional a la velocidad

El caso clásico es el de la fricción hidrodinámica proporcional a la velocidad y que aparece en los libros dados en las referencias. Lo que no es usual es mostrar que el lugar geométrico de los máximos de las trayectorias a una rapidez inicial fija

$$\begin{aligned} x_m &= \rho \left(\frac{\cos \alpha \sin \alpha}{1 + \epsilon \sin \alpha} \right), \\ y_m &= \left(\frac{\rho}{\epsilon^2} \right) (\epsilon \sin \alpha - \ln(1 + \epsilon \sin \alpha)), \end{aligned} \quad (4)$$

donde x_m y y_m son los máximos para el ángulo inicial α . que en (4) cumple con ser el ángulo al cual la trayectoria es máxima, es decir $\alpha = \alpha(\theta_m)$. Este ángulo corresponde al ángulo respecto al sistema de coordenadas de Frenet-Serret. Las expresiones constantes en (4) corresponden a

$$\rho = \frac{v_0^2}{g}, \epsilon = b_1 v_0 / g. \quad (5)$$

Mientras que obtener (4) es directo, es decir, obtener las soluciones explícitas de (3) con

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -mg b_1 v_x \\ -mg b_1 v_y \end{pmatrix}, \quad (6)$$

y después volver a derivar las soluciones de $y(x)$ nos da (4). Sin embargo escribir las soluciones de manera cerrada, es decir en una sola expresión, no lo es tanto e involucra a la función W de Lambert. Dicha expresión es

$$r_m = - \left(\frac{1}{\sin \theta_m \epsilon^2} \right) W(-\epsilon^2 \tan \theta_m g(\alpha)), \quad (7)$$

donde la función describe el lugar geométrico en coordenadas polares con el origen en el origen del disparo. La función W de Lambert es una función logaritmo generalizado y está descrita de manera implícita.

$$z = W(z) \text{Exp}(W(z)).$$

Por otro lado, la función $g(\alpha)$ es

$$g(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha \exp(-\epsilon \sin \alpha), \quad (8)$$

con la condición de estar en el máximo. Eso ocurre al ángulo que cumple la ecuación implícita

$$\tan \theta_m = \frac{\left(\frac{1}{\epsilon^2} \right) (\epsilon \sin \alpha - \ln(1 + \epsilon \sin \alpha)) (1 + \epsilon \sin \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha}. \quad (9)$$

Note que el ángulo máximo está dado por la expresión simple

$$\tan \theta_m = \frac{y_m}{x_m}, \quad (10)$$

aún cuando (9) no se le encontró inversa y es resuelta numéricamente. En la Fig 1. se muestra la curva dada por (7) o (4) en línea sólida. En línea negra trozos se muestra el resultado para el caso sin fricción que resulta ser una elipse descrita desde la parte más baja[15]:

$$r_m = 2 \frac{\sin \theta_m}{1 + 3 \sin^2 \theta_m}. \quad (11)$$

Note que ésta expresión no contiene ninguna constante física relevante.

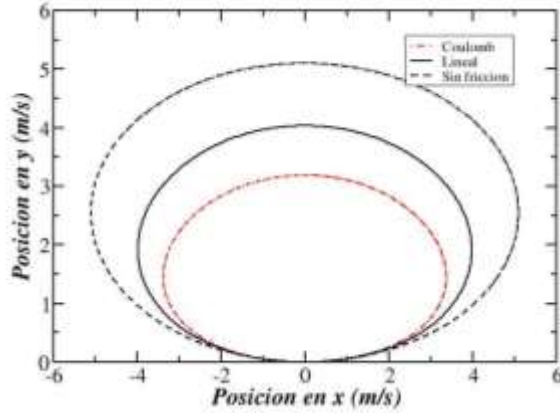


Fig. 1. Locus de los máximos en la trayectoria de un proyectil. En línea a trozos el caso sin fricción dada por (4), en línea continua el caso proporcional a la velocidad dada por (7) y en rojo, a punto y raya, el caso de fricción Coulombiano o fricción constante que se explica en el texto.

C. Fricción constante

Uno de los ejemplos más simples que se usa en los textos universitarios es el de la fricción seca o de Coulomb. Ésta es aplicada en el caso de plano inclinado, pero aquí nos tomamos la libertad de ponerla en el tiro parabólico pues además tiene una aplicación en el caso de un tiro inclinado en una superficie [19]. La solución del problema es resolver como en el caso anterior, pero las ecuaciones cartesianas tienen la forma siguiente

$$m \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mg b_0 v_x / \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ -mg b_0 v_y / \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Y ésto es un problema, pues son ecuaciones no lineales. La manera de simplificar es poner las ecuaciones escritas en unas coordenadas adecuadas, dichas coordenadas son las de Frenet-Serret donde usamos las componentes normal y tangencial a la curva. En dichas coordenadas las ecuaciones se transforman en

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta - mg b_0 \quad (13)$$

y

$$m \frac{v^2}{\rho} = -mg \cos \theta, \quad (14)$$

con $\rho = -\frac{ds}{d\theta}$ para s , la longitud de arco. Esto es, reescribirla como

$$v \dot{\theta} = -g \cos \theta, \quad (15)$$

que con la regla de la cadena,

$$\rho = -\frac{ds}{d\theta} = -\left(\frac{ds}{dt}\right) / \left(\frac{d\theta}{dt}\right), \quad (16)$$

podemos substituir en (13) para dar lugar a

$$\frac{dv}{d\theta} = v (\tan \theta + b_0 \sec \theta). \quad (17)$$

Así podemos ver que (17) es directamente integrable, si tal integral existe por supuesto. Note que la nueva variable de integración será el ángulo.

Esto permite escribir la hodógrafa del problema.

La solución explícita es

$$v(\theta) = \frac{v_0 \cos \theta_0}{\cos \theta} (\Delta / \Delta_0) \quad (18)$$

con

$$\Delta = (\sec \theta + \tan \theta)^{b_0}, \quad (19)$$

y

$$\Delta_0 = (\sec \theta_0 + \tan \theta_0)^{b_0}, \quad (20)$$

con los que

$$v_x = v_0 \cos \theta \text{ y } v_y = \sin \theta. \quad (21)$$

Ésta se dibuja en la Fig 2, en el panel izquierdo. En el panel derecho se muestra la rapidez como función del ángulo. Aquí el ángulo límite es $-\pi/2$. Algo importante a notar es que no existe una velocidad límite como en el caso lineal en la velocidad u o otras combinaciones que incluyen potencias de ella [21]. Las posiciones que son resultado de integrar (18) se escriben como,

$$\begin{aligned} x(\theta) &= -\frac{1}{g} \int_{-\theta_0}^{\theta} v^2 d\theta \\ &= -\frac{1}{g} \left(\frac{v_0 \cos \theta}{\Delta_0}\right)^2 \left[-\frac{(-2b_0 + \sin \theta)\Delta^2}{(2b_0 - 1)(2b_0 + 1)\eta} + \frac{(-2b_0 + \sin \theta_0)\Delta_0^2}{(2b_0 - 1)(2b_0 + 1)\eta_0} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

con

$$\eta = (\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}) (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}) \quad (23)$$

y, obviamente, para el ángulo inicial

$$\eta_0 = (\cos \frac{\theta_0}{2} - \sin \frac{\theta_0}{2}) (\cos \frac{\theta_0}{2} + \sin \frac{\theta_0}{2}). \quad (24)$$

Para la variable vertical tenemos

$$\begin{aligned} y(\theta) &= -\frac{1}{g} \int_{-\theta_0}^{\theta} v^2 \tan \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{g} \left(\frac{v_0 \cos \theta}{\Delta_0}\right)^2 \left[\sec^2 \theta \Delta^2 \frac{(-3 + \cos 2\theta + 4b_0 \sin \theta)}{8(b_0^2 - 1)} - \sec^2 \theta_0 \Delta_0^2 \frac{(-3 + \cos 2\theta_0 + 4b_0 \sin \theta_0)}{8(b_0^2 - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

La expresión para el tiempo

$$\begin{aligned} t(\theta) &= -\frac{1}{g} \int_{-\theta_0}^{\theta} v^2 \sin \theta d\theta \\ &= -v_0 \cos \frac{\theta_0}{g\Delta} \left[\frac{(b_0 - \sin \theta)\Delta}{\eta(b_0^2 - 1)} - \frac{(b_0 - \sin \theta_0)\Delta_0}{\eta_0(b_0^2 - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Por supuesto que puede resultar un poco extraño escribir las cosas así y no con el tiempo como el parámetro libre, pero para hacer las gráficas se puede hacer intrínsecamente como se hace con la gráfica $y(x)$ que depende del tiempo. Si hacemos el ejercicio sin fricción, es decir si en todas las ecuaciones anteriores hacemos la fricción nula, las soluciones standard se verán como

$$t(\theta) = -\frac{v_0 \cos \theta_0}{g} (\tan \theta - \tan \theta_0)$$

y las coordenadas

$$x(\theta) = -\frac{(v_0 \cos \theta_0)^2}{g} (\tan \theta - \tan \theta_0)$$

$$y(\theta) = -\frac{(v_0 \cos \theta_0)^2}{2g} (\sec^2 \theta - \sec^2 \theta_0)$$

Esta forma poco familiar solo es el resultado de la parametrización que se hizo con el ángulo. Con un poco de trabajo se pueden recuperar las ecuaciones cuadráticas acostumbradas que aparecen en los cursos. Por desgracia de (24) a (26) no parece tener una inversión simple. En términos teóricos esto no es importante pues fácilmente se pueden hacer los dibujos de las trayectorias con ésta parametrización, pero en términos experimentales es un poco más engorrosa. No obstante este problema sí presenta la posibilidad de cambiar el parámetro de fricción al cambiar la superficie donde se realiza el movimiento, pues el problema bidimensional de una partícula sobre una superficie inclinada a un ángulo es completamente equivalente.

De cualquier manera podemos encontrar explícitamente lugares geométricos standard con la parametrización en el ángulo de la trayectoria. En particular el locus de los máximos se puede encontrar resolviendo (18) con las condiciones de que v_y sea nula, ello ocurre cuando el ángulo es nulo. Para esas condiciones las soluciones quedan como

$$x(\theta_0) = -\frac{1}{g(4b_0^2-1)} \left(\frac{v_0 \cos \theta_0}{\Delta_0} \right)^2 [2b_0 + \Delta_0^2 (-2b_0 + \sin \theta_0) / \cos \theta_0]$$

(30)

$$y(\theta_0) = -\frac{1}{8g(b_0^2-1)} \left(\frac{v_0 \cos \theta_0}{\Delta_0} \right)^2 [2 + \Delta_0^2 \sec^2 \theta_0 (-3 + \cos 2\theta_0 + 4b_0 \sin \theta_0)]$$

(31)

El locus se dibuja para éste caso en la Fig. 1, en línea roja con punto. Lo que podemos resaltar es que el caso coulombiano no presenta una velocidad límite como ocurre en el caso de fricción proporcional a la velocidad o a su cuadrado.

D. La hodógrafa

Como comentamos antes, la hodógrafa de la velocidad es el grafo de sus componentes. Ésta puede ser obtenida explícitamente para varios de los casos el desarrollo (3). La Ecuación (17) puede ser reescrita en general como

$$\frac{dv}{d\theta} = v (\tan \theta + f(v) \sec \theta)$$

En particular se pueden resolver los casos de un solo término en el desarrollo en potencias de la velocidad, conocido como el problema de Legendre. En la Fig 3. Se muestra la hodógrafa del caso lineal para comparación con el caso de fricción constante. Lo que podemos resaltar es que el caso coulombiano no presenta una velocidad límite como ocurre en el caso de fricción proporcional a la velocidad o a su cuadrado.

IV. DISCUSIÓN

En la educación universitaria los cursos introductorios de física incluyen el problema de trayectorias de proyectiles como uno de sus ejemplos. Sin embargo, muchos de esos programas no abordan el problema de pérdida de energía en toda su complejidad, así como han estado enfocados a una enseñanza orientada a la resolución de problemas con soluciones puntuales. La búsqueda de soluciones que involucren varias órbitas no ha sido suficientemente discutida en la comunidad. No así en la comunidad internacional que ha ido descubriendo nuevas aristas a un problema milenario. El presente artículo pretende introducir a los estudiantes de los inicios de la licenciatura a estos tratamientos que aparecen en la literatura en inglés, alguna es posible encontrar en la biblioteca y con los contratos vigentes de las instituciones académicas. Otros resultados no son de acceso inmediato a través de los repositorios institucionales.

Uno de los enfoques que en ocasiones se pierde de vista es el estudio de sistemas simples en los que el problema es encontrar lugares geométricos. El lugar geométrico que se suele enseñar es el de la envolvente para las trayectorias de un proyectil. El lugar geométrico de los máximos tardó tiempo en ser descrito (o re-descrito) a pesar de ser muy natural. Las isócronas en el tiro parabólico con fricción tampoco habían sido descritas a pesar de que cierto tipo de juego pirotécnico lo muestra experimentalmente [18]. Existen otros problemas que pueden ser analizados en la búsqueda de lugares geométricos interesantes. Uno de ellos es el de una partícula cargada eléctricamente sujeta a un campo magnético

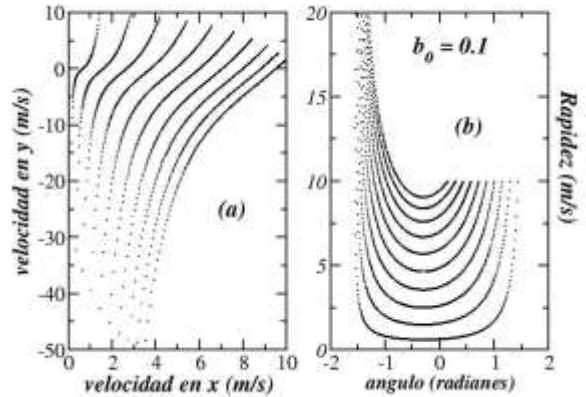


Fig. 2. (a) Hodógrafa de la trayectoria de un proyectil bajo la acción de fricción constante para varias condiciones iniciales en el ángulo. Note que no hay una velocidad límite como en el caso de fricción lineal. (b) Rapidez contra ángulo de la velocidad. El ángulo límite es $-\pi/2$.

y eléctrico constante. Aquí las órbitas helicoidales dan lugar a una descripción cuántica de los niveles de Landau, o a las cicloides para condiciones iniciales particulares.

Otro problema relacionado es el de la búsqueda de cáusticas en óptica geométrica con diferentes geometrías o en agua, véase por ejemplo [22]

V. CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos en español algunos resultados interesantes sobre los lugares geométricos en el problema de tiro parabólico con fricción. En particular se describe el lugar geométrico de todos los máximos como función del ángulo de lanzamiento para fricción coulombiana y proporcional a la velocidad. En cuanto a la hodógrafa se comenta que es posible escribirla explícitamente para varios casos, aún cuando no sea posible resolver analíticamente las ecuaciones. Además sirve para resaltar detalles como la inexistencia de una velocidad terminal si la fricción es constante.

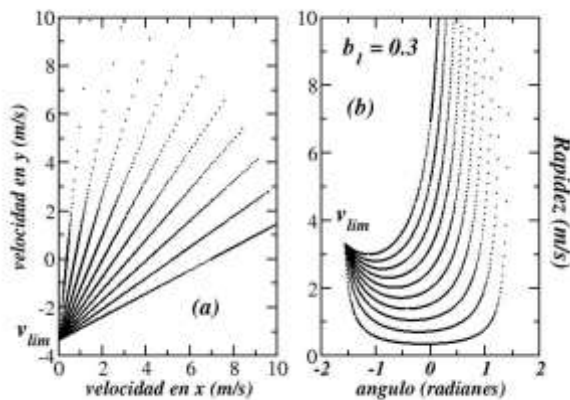


Fig. 3. (a) Hodógrafa de la trayectoria de un proyectil bajo la acción de fricción lineal en la velocidad para varias condiciones iniciales en el ángulo. La velocidad límite se indica en la figura. (b) Rapidez contra ángulo de la velocidad. El ángulo límite es $-\pi/2$.

El caso de tiro parabólico con fricción coulombiana puede realizarse como el tiro en un plano inclinado [19]. Lo cual permite que éste caso sea utilizado para prácticas de laboratorio.

REFERENCIAS

[1] R. Resnick, D. Halliday y K. Krane, *Física Volumen 1*. (13ra ed.) México: Grupo Editorial Patria, 2002.
 [2] Sears, Zemansky, Young y Freeman. *Física Universitaria. Volumen 1*. (13ra Ed.) México: Pearson. 2018.
 [3] M. Alonso y E.J. Finn "Física", Vol 1. Bogotá: Fondo Educativo Interamericano. 1970.
 [4] P. Tippens. "Física. Conceptos y aplicaciones". México: McGraw-Hill, 2020.
 [5] P.A. Tipler, G. Mosca. "Física para la ciencia y la tecnología. Vol 1: Mecánica, oscilaciones y ondas, termodinámica". México: Reverté. 2010.
 [6] J.R. Taylor "Mecánica clásica". México: Reverté, 2018.
 [7] J.V. José y E.J. Saletan, "Classical mechanics: a contemporary approach" USA: Cambridge University Press; 11 mayo 1998.
 [8] H. Goldstein, "Mecánica clásica" España: Reverté; 1987.
 [9] C.H. Belgacem C H *Eur. J. Phys.*35, 055025, 2014.

[10] K. Yabushita, M. Yamashita and K. Tsuboi *J Phys A: Math and Theo*, 40, 8403 16p 2007.
 [11] M. Turkyilmazoglu, *Eur. J. Phys.* vol. 37, 035001, 2016.
 [12] D. A Morales, *Acta Mech*, vol. 227, pp 1593-607, 2016.
 [13] S.M. Stewart, *Eur. J. Phys.* vol. 33, pp 149-66, 2012
 [14] S.M. Stewart, "Characteristics of the trajectory of a projectile in a linear resisting medium and the Lambert W function" *17th. Biennial Congress of the Australian Institute of Physics Paper 27*, 2006.
 [15] J.L. Fernández-Chapou, A.L. Salas-Brito and C.A. Vargas. *Am. J. Phys.* vol. 72, p 1109, 2004
 [16] M.A. Carrillo-Bernal, P.E. Mancera-Piña, H.H. Cerecedo-Núñez, P. Padilla-Sosa, H.N. Núñez Yépez and A.L. Salas-Brito, *Am. J. Phys.* vol 82, p 707, 2014
 [17] S.M. Stewart. *Int. J. Math Educ. Sci. Technol.* vol. 37, p 411-31, 2006.
 [18] S.M. Stewart, *Eur. J. Phys.* vol 32, p L7-10, 2011
 [19] H. Hernández-Saldaña *Eur. J. Phys.* vol 31, p 1319-29, 2010.
 [20] X. Wang, "Trajectory of a particle on a frictional inclined plane" *Am. J. Phys.* vol. 82, p 764-8, 2014.
 [21] H. Hernández-Saldaña. "Locus of the apices of projectile trajectories under constant drag". *Eur. J. Phys* 38, 2017, 065006.
 [22] H. Hernández-Saldaña. "Analytical velocity hodograph of projectile motion under polynomial drag" *J.Phys: Conf.Ser.* (en prensa).
 [23] K. Bever. "On the physics of light caustics in water". <https://www.onlandscape.co.uk/2019/01/physics-of-caustic-light-in-water/>. 2019.
 [24] Dittrich T, Hänggi P, Ingold G L, Kramer B, Schön G and Zwerger W 1998 *Quantum Transport and Dissipation* (Weinheim: Wiley-VCH)
 [25] M. Razavy, "Classical and Quantum Dissipative Systems", London: Imperial College Press, 2006.