

¿Es la mecánica cuántica una teoría emergente?

J. Avendaño, L. Pérez-Trejo, A. F. Méndez-Sánchez

Instituto Politécnico Nacional

Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, CDMX, México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55275 E-mail: javendanol@ipn.mx, lperez@ipn.mx,

Resumen — El debate inacabado entre Einstein y Bohr sobre si las propiedades cuánticas de la materia son intrínsecas o emergentes continúa abierto hoy en día a pesar de que la visión estadística objetiva de Einstein se ha visto menguada desde las verificaciones experimentales de las desigualdades de Bell (evidencia de la no-localidad). Sin embargo, el nuevo campo de estudio surgido en la mecánica de fluidos llamado “Análogos Cuánticos Hidrodinámicos”, apoya de manera contundente la idea de que la teoría cuántica pueda ser una teoría incompleta y posiciona a la electrodinámica estocástica como una posible teoría que proporcione los elementos “ocultos” que permitiría entender desde una perspectiva objetiva y causal el azar cuántico.

Palabras Clave — Teoría cuántica, mecánica de fluidos, fenómenos emergentes.

Abstract — The inconclusive debate between Einstein and Bohr about whether quantum theory is complete or not remains open today, even though Einstein's realist position has been overcome since the experimental verifications of Bell's inequalities (non-locality evidence). However, the newly emerging field of study in fluid mechanics called "Hydrodynamic Quantum Analogues", strongly supports the idea that quantum theory may be incomplete, thus placing stochastic electrodynamics as a possible theory that provides the "hidden" elements that would allow to understand from an objective and causal perspective the quantum mystery.

Keywords — Quantum theory, fluid mechanics, emerging phenomena.

I. INTRODUCCIÓN

La electrodinámica estocástica (EDE) postula que las propiedades cuánticas son emergentes y no propiedades intrínsecas de la materia. Su hipótesis fundamental es la postulación de la existencia de un campo de fondo de radiación estocástico que permea el Universo entero y que promedia a cero. De tal manera que las características cuánticas de la materia emergen como consecuencia de la interacción con este campo de fondo, esto es, las propiedades cuánticas son justamente “la huella digital” de este campo de fondo. Sin embargo, la crítica principal a la EDE ha sido que tal campo no se ha observado nunca. En este punto es donde el nuevo campo de estudio surgido en la mecánica de fluidos denominado analogías cuánticas hidrodinámicas viene en ayuda de la EDE al proporcionar una visualización directa de cómo pueden emerger fenómenos análogos a los cuánticos en un sistema descrito de manera absoluta por la física clásica.

II. LA ONDA PILOTO

La interpretación ortodoxa de la teoría cuántica, liderada por Niels Bohr, Werner Heisenberg y Max Born [1,2] y que a la postre llega a ser la dominante, establece que esta teoría es completa, es decir, la naturaleza es probabilista *per se*, siendo $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV$ la probabilidad de encontrar a la partícula en un volumen dV alrededor del punto \mathbf{r} del espacio al tiempo t . Al interior de esta interpretación la relación de incertidumbre entre posición y momento es un indicativo de que las trayectorias en el mundo cuántico no existen [3]. Einstein siendo un realista se oponía rotundamente a esta interpretación “estoy, de hecho, firmemente convencido de que el carácter esencialmente probabilístico de la teoría cuántica ha de achacarse únicamente al hecho que esta opera con una descripción incompleta del sistema físico” [4]. Lo mismo sucedía con Louis de Broglie “la función de onda no es una descripción completa de la realidad, sino que debe complementarse con otras variables” [5]. Louis de Broglie no solamente introdujo el concepto de onda de materia [6-9], sino que avanzó una interpretación a contracorriente de la ortodoxa añadiendo a la función de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ una coordenada de partícula $\mathbf{r}(t)$, la posición instantánea de la partícula localizada en la onda extendida, la cual cambia con el tiempo cómo

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{|\psi(\mathbf{r}, t)|^2} \text{Im}[\psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \psi(\mathbf{r}, t)], \quad (1)$$

es decir, introduce a la teoría la trayectoria de la partícula como la variable que haría más completa la descripción de la realidad. De esta manera de Broglie reconoce en el campo- $\psi(\mathbf{r}, t)$ un doble rol, este no solamente determina la probabilidad de donde se encontrará el corpúsculo, sino que también influye en la localización ejerciendo una fuerza sobre él, determinando así la trayectoria de la partícula. De esta manera el campo- $\psi(\mathbf{r}, t)$ actúa como una **onda piloto** que guía a la partícula a regiones donde el campo- $\psi(\mathbf{r}, t)$ es más intenso; esta propuesta presentada en el congreso Solvay de 1927 [10] fue denominada teoría de la onda piloto y es la versión simplificada de la teoría de de Broglie publicada un poco antes con el nombre de teoría de la doble solución [11,12]. La acogida poco favorable que tuvo en ese momento, y sobre todo la crítica devastadora de W. Pauli [10], hizo que de Broglie abandonara esta visión y se acogiera a la interpretación puramente probabilística ortodoxa, hasta que en el año

1952 volvió a preguntarse si no era mejor aquella visión que tuvo 25 años antes, gracias a los trabajos de David Bohm [13,14]. En estos trabajos Bohm no solo derrumba algunos mitos, como aquél establecido por J. von Newmman [15] de la no existencia de variables ocultas, introduciendo el concepto de variable oculta no-local. Sino que también reinterpreta algunos elementos de la teoría de Schrödinger, como por ejemplo la velocidad del flujo de probabilidad es interpretada por Bohm como una velocidad de partículas, de esta manera obtiene predicciones estadísticas completamente consistente con las de la mecánica cuántica convencional, además de introducir las trayectorias en el esquema de la teoría cuántica, que están determinadas por el potencial al que se encuentra sometida la partícula $V(\mathbf{r}, t)$ además de un potencial adicional $Q(\mathbf{r}, t)$ llamado potencial cuántico

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\nabla V - \nabla Q, \quad (3)$$

donde este potencial cuántico está completamente determinado por el campo- ψ (campo de Schrödinger)

$$Q(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 |\Psi(\mathbf{r}, t)|}{|\Psi(\mathbf{r}, t)|}, \quad (4)$$

que hace evidente la no-localidad. A diferencia de la teoría de de Broglie de la doble solución, en la visión Bohmiana solamente hay una onda: la onda guía y la onda que determina la probabilidad es una y la misma. De alguna manera podemos decir que esta visión es menos rica desde el punto de vista dinámico que la teoría de la doble solución de de Broglie. Sin embargo, la mecánica Bohmiana es considerada como un parteaguas, proporcionando un contraejemplo a las pruebas de imposibilidad que dominaban en ese momento.

En este período, de Broglie nuclea una pequeña escuela de colaboradores [16], Jean-Pierre Vigié entre otros, quien introduce en la mecánica Bohmiana un elemento estocástico adicional que se origina a través de la interacción de las partículas con una realidad subcuántica [17], resultando la velocidad de las partículas en una especie de promedio alrededor del cual oscilan como una especie de movimiento Browniano, de manera que la onda guía es una envolvente de esta caótica dinámica.

III. ANALOGÍAS CUÁNTICAS HIDRODINÁMICAS

El año de nacimiento de esta disciplina es 2005 cuando el equipo de Yves Couder [18] observó que gotas milimétricas de un fluido pueden caminar autopropulsadas sobre la superficie vibrante (de manera estocástica) del mismo fluido. Estas pequeñas gotas se pueden balancear oscilando verticalmente (flotando) indefinidamente sobre la superficie

del fluido cuando el contenedor del fluido vibra verticalmente a aceleraciones altas [19]. Este equipo de investigadores franceses mostró que las gotas balanceantes se pueden mover horizontalmente a la superficie del líquido con velocidad constante al incrementar la frecuencia de vibración, la transición de gota balanceante a gota caminante se hace de manera continua y se lleva a cabo cuando la frecuencia de vibración vertical llega a un valor umbral γ_F , frecuencia de Faraday, en que la superficie llega a ser espontáneamente agitada. Por debajo de γ_F la gota permanece balanceándose arriba-abajo, por arriba de γ_F la gota adquiere un movimiento rectilíneo con velocidad constante a lo largo de la superficie, velocidad que se incrementa con la frecuencia γ [18].

A estas frecuencias cada impacto de la gota con la superficie caóticamente agitada genera un frente de onda que se expande radialmente, detrás de la cual se activa un campo de ondas de Faraday que decae, a su vez la gota recibe (tercera ley de Newton) un impulso horizontal por parte de las ondulaciones de la superficie que la fuerza a desplazarse paralelamente a la superficie, como la gota continúa rebotando este proceso se repite sucesivamente y la onda superficial se regenera estableciéndose un equilibrio o resonancia entre la gota caminante y el frente de onda sobre la superficie. Esto es, la gota caminante está siempre acompañada de la onda superficial. Estos dos objetos (gota caminante y onda superficial) están íntimamente entrelazados. Es decir, se ha establecido una especie de dualidad onda-partícula, justamente como un fenómeno emergente. Este acoplamiento es el que produce lo que se observa como una autopropulsión de la gota caminante. La onda se extiende sobre la superficie y censa otros objetos lejanos, por ejemplo, condiciones de frontera del recipiente, modificándose y como está acoplada a la gota caminante, este cambio de la onda altera el comportamiento de la gota caminante. Esto es, la onda está funcionando justamente como una **onda piloto** [20].

Cuando dos gotas caminantes llegan a estar cerca, interactúan a través de sus ondas piloto, y está “colisión” entre las gotas puede producir que se dispersen o puede causar que orbiten una alrededor de la otra formando un sistema de dos gotas acopladas a través de sus ondas asociadas [18,21].

También se ha efectuado experimentos donde se sumerge una barrera, la onda piloto de la gota caminante es parcialmente reflejada y transmitida, la onda reflejada causa que la gota caminante aproximándose a la barrera sea reflejada, pero ocasionalmente cruza la barrera con una probabilidad que decrece con el ancho de la barrera, el análisis estadístico efectuado rememora los resultados del efecto túnel [22].

Se han realizado experimentos donde la condición de frontera corresponde a una rendija, la onda asociada a la gota caminante se difracta en la rendija, la gota caminante sufre desviaciones de la trayectoria recta, la estadística efectuada con muchas gotas muestra que el conjunto de gotas que pasan

a través de la rendija es semejante al experimento de difracción de electrones [23].

Para dos rendijas, la onda piloto de la gota pasa a través de las dos rendijas, sin embargo, la gota pasa a través de una sola rendija, pero la distribución estadística de muchas gotas corresponde al patrón de interferencia de las dos rendijas [23,24].

Se ha encontrado también efectos de confinamiento y distribución estadística de gotas semejantes a la distribución de electrones en corrales cuánticos [25,26]. Cuando el recipiente (la charola conteniendo el fluido vibrante) se hace rotar, las gotas caminantes se rotan en órbitas discretas induciéndose de esta manera una especie de cuantización del momento angular [27,28]. Encapsulando una suspensión magnética en las gotas y aplicando un campo magnético variable espacialmente se ha estudiado a estas gotas caminantes y su onda piloto sometida a un campo central correspondiente a un oscilador armónico en 2-D, los resultados muestran cuantización tanto en el radio promedio como en el momento angular [29].

IV. LA ELECTRODINÁMICA ESTOCÁSTICA

Estas analogías cuánticas hidrodinámicas proporcionan una evidencia visual de cómo fenómenos análogos a los fenómenos cuánticos pueden ser emergentes. Justamente esta es la hipótesis fundamental de la *electrodinámica estocástica* (EDE): *las propiedades cuánticas de la materia no son intrínsecas sino emergentes*. La EDE es simplemente la electrodinámica clásica más un campo de fondo estocástico clásico de promedio nulo [30]. De esta manera, los entes físicos en esta teoría son campos electromagnéticos y partículas que satisfacen las ecuaciones clásicas de Maxwell y de Newton respectivamente. A diferencia de la teoría del electrón de Lorentz [31] que supone que la solución homogénea de las ecuaciones de Maxwell es nula en todo el espacio, la EDE asume que esta solución homogénea involucra un campo de radiación estocástico de promedio nulo que es homogéneo e isotrópico y tiene además un espectro invariante de Lorentz [30-32] pero que con dispersión distinta de cero; esta condición de frontera es ampliamente discutida por Boyer [32]. La homogeneidad e isotropía provienen de las mismas características del vacío por supuesto, al no haber ninguna posición ni dirección del espacio privilegiada, y la invariancia de Lorentz, de no privilegiar ningún sistema de referencia inercial. Este campo de fondo aleatorio es llamado campo de punto cero (CPC) o campo de vacío clásico. El origen físico de este campo lo proporcionan los mismos elementos de la teoría; sabemos que cada partícula cargada es un emisor de radiación, por consiguiente, el conjunto de cargas que pueblan el Universo produce en cada punto del espacio un complejo campo de fondo, cuya naturaleza estocástica es evidente precisamente debido al gran número de fuentes incoherentes que lo

producen. De esta forma, el Universo entero se encuentra permeado por un complejo campo de fondo fluctuante, en el que cada partícula se encuentra inmersa y a su vez contribuye a generarlo [33]. Cabría suponer que en el curso de la evolución del Universo se hubiese alcanzado una situación de equilibrio estadístico, que sería la etapa actual, en la cual las propiedades estadísticas del campo estocástico de radiación son básicamente homogéneas, isotrópicas e independientes del tiempo [34]. Este campo estocástico de fondo, desde un punto de vista teórico, lo podemos construir como un ensamble homogéneo e isotrópico de ondas planas electromagnéticas estocásticas [30,35,36], la Fig.1 muestra un mapa de contorno en el plano- xy para un subensamble de frecuencia fija, se observa que este campo de fondo posee una estructura muy específica, la cual consiste en una red aleatoria de cordilleras, que con el tiempo han llegado a ser nombradas cicatrices del campo estocástico de fondo [36]. Debido a que el campo promedia a cero, los mapas de contorno dejan ver la estructura de las fluctuaciones

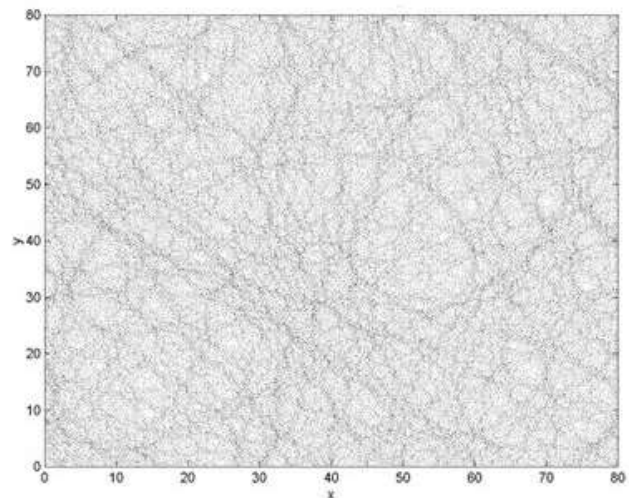


Fig. 1. Mapa de contorno en el plano- xy que muestra las cicatrices del campo estocástico de fondo para un subensamble de 1000 ondas planas de frecuencia fija. Las dimensiones de la gráfica están normalizadas a la longitud de onda.

Es obvio que las partículas, como los electrones, sometidas a este campo estocástico de fondo severamente fluctuante, tendrán una dinámica aleatoria muy complicada. *Esto permite, en principio, intentar tender un puente entre este comportamiento estocástico de las partículas sometidas al campo estocástico de fondo y el comportamiento probabilístico de los sistemas que describe la mecánica cuántica.*

Las cicatrices del campo de vacío se modifican en presencia de condiciones de frontera, por ejemplo, cuando se coloca una placa metálica en $y = 0$ se obtiene el mapa que se muestra en la Fig.2

Podemos observar, al comparar las Figs. 1 y 2, de manera inmediata que el patrón de cicatrices se modifica. Esto es, las

cicatrices del campo estocástico de fondo son sensibles a las condiciones de frontera. Veamos ahora cómo se modifican las cicatrices cuando la placa metálica contiene una rendija, la Fig.3 muestra los resultados

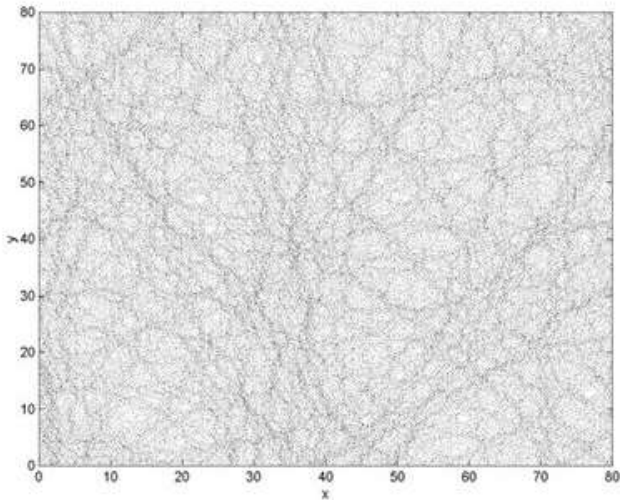


Fig. 2. Mapa de contorno en el plano- xy que muestra las cicatrices del campo estocástico de fondo en presencia de una placa metálica situada en $y = 0$.

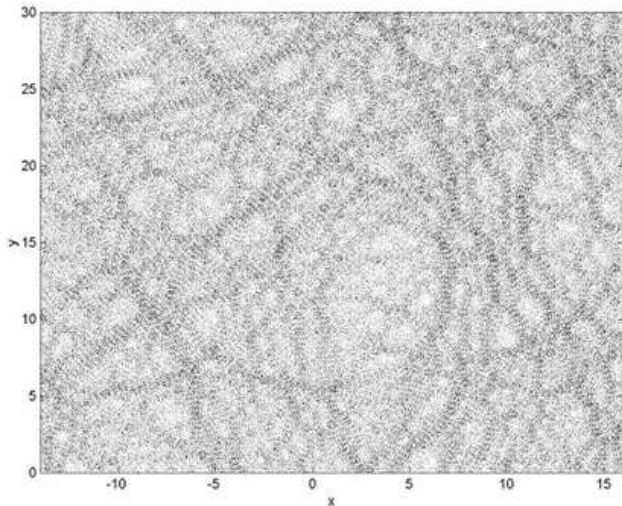


Fig. 3. Mapa de contorno en el plano- xy que muestra las cicatrices del campo estocástico de fondo en presencia de una placa metálica con una rendija. La placa se encuentra situada en $y = 0$.

El mapa de contorno en la Fig.3 se muestra ahora en la región $[-15,15] \times [0,30]$ del plano- xy debido a que la rendija se ha situado desde $x = 0$, hasta $x = 1$. Podemos observar que la distribución de cicatrices cambia nuevamente. Sin embargo, existe algo más interesante, si hacemos un promedio espacial de las fluctuaciones del campo de fondo (un suavizado del mapa de contorno de la Fig.3) obtenemos el mapa de contorno que se muestra en la Fig.4.

En esta Figura 4 vemos que el suavizado (promedio espacial) revela un patrón de difracción perfectamente coherente, subyacente a las cicatrices.

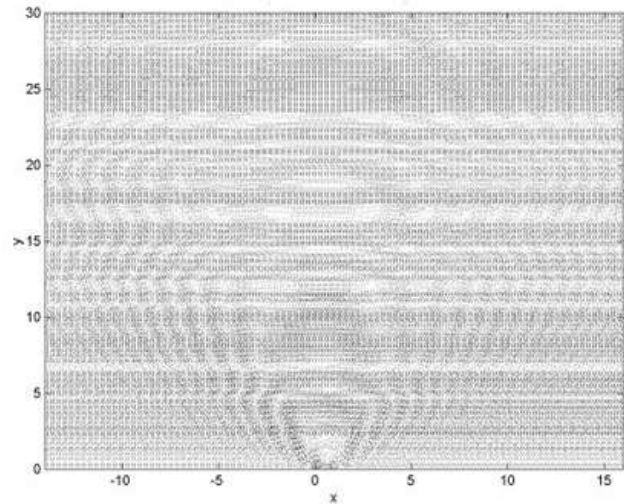


Fig. 4. Mapa de contorno en el plano- xy de la Fig. 2 después de un suavizado (promedio espacial).

El análisis de estos resultados nos lleva a concluir que, en presencia de estructuras difractantes, el campo estocástico de fondo se desdobra en dos componentes: una estocástica que aún presenta cicatrices, y otra mucho más organizada, cuyo orden es exhibido en un patrón de difracción perfectamente coherente. Los cálculos muestran que la componente dominante es la estocástica, dando como resultado que la apariencia general del campo difractado sea estocástica, como claramente muestra la Fig.3.

Las partículas cuánticas presentan un comportamiento ambiguo entre partícula y onda que se ha dado en llamar dualidad onda-partícula. El experimento paradigmático que muestra esta característica es la difracción de electrones a través de rendijas, cuando electrones atraviesan una placa con rendijas y estos son recolectados en una pantalla posterior a las rendijas, los electrones se distribuyen sobre la pantalla en un patrón de difracción completamente semejante al observado en la óptica clásica. A decir de R. Feynman este fenómeno se encuentra en el corazón de la mecánica cuántica, y cuando lo entendamos, comenzaremos a entender la teoría cuántica [37]. En conveniente recordar que la mecánica cuántica *describe* en detalle este fenómeno, pero *no lo explica!* La EDE intenta entender este comportamiento como un fenómeno emergente surgido de la interacción de las partículas con el campo de fondo.

Los cálculos del campo de fondo mostrados en las Figuras anteriores nos llevan a plantearnos las siguientes preguntas: 1.- ¿Podrían los electrones, inmersos en este campo de fondo, seguir de alguna manera el campo ordenado de difracción?

2.- ¿Podrían filtrar la componente desordenada, precisamente como consecuencia de su desorden (promediando quizás a cero esta componente)?

3.- ¿La estructura de difracción subyacente a las cicatrices podría ser la responsable de guiar a los electrones (como si se tratase de una **onda piloto**) hacia las posiciones del patrón de difracción que se observa en los experimentos de difracción de electrones [38]?

El programa trazado por la EDE ha sido el de determinar hasta donde esta teoría clásica puede reproducir los resultados de la mecánica cuántica y de la electrodinámica cuántica, antes de ir más lejos (i.e., más allá del dominio cuántico). Los resultados arriba presentados están encaminados a mostrar la posibilidad de que al interaccionar los electrones con el campo estocástico de fondo se forme una coraza electromagnética alrededor de ellos que a la postre funcione como una onda piloto a la manera de de Broglie.

Es importante mencionar que la EDE ha conseguido logros parciales muy interesantes. Ha logrado mostrar que el espectro de radiación de cuerpo negro puede ser derivado sin recurrir a suposiciones sobre el intercambio de paquetes de energía cuantizados [39-41]. También ha logrado mostrar la estabilidad (al menos en el estado base) de las órbitas del electrón en el átomo de hidrógeno [32,42,43] como resultado del equilibrio en el balance de energía intercambiado por el electrón y el campo de fondo. Un logro por demás importante es mostrar la emergencia de correlaciones de intercambio entre partículas idénticas por intermedio del CPC [44,45]. Y consideramos que la difracción de electrones como fenómeno emergente de la difracción del campo de punto está en camino de probarse [46].

Estos resultados y otros sin ser conclusivos parecen apuntar en una dirección de pensamiento prometedora.

V. CONCLUSIONES

En este pequeño escrito hemos querido dejar en evidencia que la mecánica cuántica sea una teoría emergente es plausible. Efectos análogos a los cuánticos están emergiendo de manera contundente en la mecánica de fluidos. En este contexto hay indicios de que la electrodinámica estocástica nos señale un camino que nos lleve a la mecánica cuántica como una teoría emergente. En la sección se plantearon algunas preguntas cruciales, si la respuesta a estas preguntas es afirmativa, entonces el efecto del campo de fondo sobre las partículas será producir las desviaciones angulares acorde con la estructura específica del campo de fondo, por ejemplo, en el caso de las rendijas las desviaciones guiarían a las partículas en las direcciones adecuadas para formar el patrón de difracción correspondiente.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo proporcionado por la COFAA-IPN y por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN a través del proyecto SIP20220073. LPT y AFMS son becarios EDD.

REFERENCIAS

- [1] M. Jammer, "The Philosophy of Quantum Mechanics" (Wile Interscience, 1974).
- [2] Bernard D'Espagnat, "Conceptual foundations of Quantum Mechanics" (CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018).
- [3] W. Heisenberg, "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", *Zeitschrift für Physik* **43**, 172-198 (1927).
- [4] P.A. Schilpp, Ed. "Albert Einstein Philosopher Scientist" (Tudor, New York, 1949).
- [5] J.S Bell en "The measurement theory of Everet and de Broglie's pilot wave" in "Speakable and unspeakable in quantum mechanics" (Cambridge University Press 1993).
- [6] L. de Broglie, "Ondes et quanta", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **177**, 507-510 (1923).
- [7] L. de Broglie, "Quanta de lumière, diffraction et interférences", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **177**, 548-550 (1923).
- [8] L. de Broglie, "Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **177**, 630-632 (1923).
- [9] L. de Broglie, "*Recherche sur la théorie des quanta*", Thèses présentées à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences (1924).
- [10] G. Bacciagaluppi, A. Valentini, "*Quantum Theory at the Crossroads: Reconsidering the 1927 Solvay Conference*", (Cambridge University Press, 2009).
- [11] L. de Broglie, "La structure atomique de la matière et du rayonnement et la mécanique ondulatoire", *Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de l'Académie des Sciences (Paris)* **184**, 273-274 (1927).
- [12] L. de Broglie, "La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement", *Le Journal de Physique et Radium* **6**, 8, 225-241 (1927).
- [13] D. Bohm, "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables I", *Phys. Rev.* **85**, 166-179 (1952).
- [14] D. Bohm, "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables II", *Phys. Rev.* **85**, 180-193 (1952).
- [15] J. von Neumann, "Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik", (Springer, Berlin 1932)
- [16] H. Freistadt, *Suppl. Nuovo Cimento* **5**, 1-70 (1957).
- [17] L.V.Chebotarev, in "Jean-Pierre Vigié and stochastic Interpretation of Quantum Mechanics" (Apeiron, 2000).
- [18] Y. Couder, S. Protiere, E. Fort, A Boadaoud, "Dynamical phenomena waking and orbiting droplets", *Nature* **437**, 208 (2005).
- [19] Y. Couder, E. Fort, A Boadaoud, C.H. Gautier "", *Phys. Rev. Lett.* **94**, 177801 (2005).
- [20] JWM Bush, "Pilot-wave hydrodynamics", *Annu. Rev. Fluid Mech.* **47**, 1-28 (2015).
- [21] JWM Bush, Y. Couder, T. Gilet, PA Milewki, A Nachbin, "Introduction to focus issue on hydrodynamic quantum analogs", *Chaos* **28**, 096001 (2018).
- [22] A Eddi, E Fort, F Misy, Y Couder, "Unpredictable tunneling of a classical wave-particle associations", *Phys. Rev. Lett.* **102**, 240401 (2009).
- [23] Y. Couder, E. Fort, "Single-particle diffraction and interference at macroscopic scale", *Phys. Rev. Lett.* **97**, 154101 (2006).

- [24] G Pucci, DM Harris, LM Faria, JWM Bush, “Walking droplets interacting with single and double slit”, *J. Fluid Mech.* **835**, 1136-1156 (2018).
- [25] DM Harris, JWM Bush, “The pilot-wave dynamics of walking droplets”, *Phys. Fluids* **25**, 091112 (2013).
- [26] JWM Bush, “Quantum mechanics writ large”, *PNAS* **107**, 17455-17456 (2010).
- [27] AU Oza, DM Harris, RR Rosales, JWM Bush, “Pilot-wave dynamics in a rotating frame: on the emergence of orbital quantization”, *J. Fluid Mech.* **744**, 404-429 (2014).
- [28] AU Oza, O Wind_Willansen, DM Harris, RR Rosales, JWM Bush, “Pilot-wave dynamics in a rotating frame: exotic orbits”, *Phys. Fluids* **26**, 082101 (2014).
- [29] S Perrard, M Labousse, E. Fort, Y Couder, JWM Bush, “Self-organization into quantized eigenstates of a classical wave-driven particle”, *Nat. Commun.* **5**, 3219 (2014).
- [30] L. de la Peña and A. M. Cetto, “*The Quantum Dice. An Introduction to Stochastic Electrodynamics*” (Kluwer Academic Publisher, Netherlands, 1996).
- [31] H. A. Lorentz, “*The Theory of Electrons, and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat*” (Second Edition, Dover Publications, New York, 1952).
- [32] T.H. Boyer, *Phys. Rev. D* **11**, 790 (1975).
- [33] L. de la Peña “Introducción a la Mecánica Cuántica.”: Fondo de Cultura económica – UNAM, México (2006).
- [34] E. Santos, *An. Real Soc. Esp. Fís. Quím.* **64**, 317 (1968).
- [35] M. Ibison, and B. Haisch, “Quantum and classical statistic of the electromagnetic zero-point field”, *Phys. Rev. A* **54**, 2737 (1996).
- [36] J. Avendaño, and L. de la Peña, “Reordering of the ridge patterns of a stochastic electromagnetic field by diffraction due to an ideal slit”, *Phys. Rev. E* **72**, 066605 (2005).
- [37] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, “The Feynman Lectures on Physics, Vol 3” (Addison-Wesley, 1965).
- [38] A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, and T. Kawasaki, “Demonstration of Single-Electron Built-Up of an Interference Pattern”, *Amer. J. Phys.* **57**, 117-120 (1989).
- [39] T.H. Boyer, *Phys. Rev. D* **29**, 1096 (1984).
- [40] L. de la Peña, and A.M. Cetto, *Rev. Mex. Phys.* **48**, Suppl 1, 1 (2002).
- [41] L. de la Peña, A. Valdés, A.M. Cetto, *Am. J. Phys.* **76**, 947 (2008).
- [42] D. C. Cole and Y. Zou, *Phys. Lett. A*, **317**, 14-20 (2003).
- [43] D. C. Cole and Y. Zou, *Phys. Rev. E* **69**, 016601, pp. 1-12 (2004).
- [44] A. Valdés “Investigación del origen del enredamiento cuántico desde la perspectiva de la Electrodinámica Estocástica (Tesis Doctoral),” Universidad Nacional Autónoma de México, México 2010.
- [45] L. de la Peña, A. Valdés, A.M. Cetto *Phys. E*, **42**, 308 (2010).
- [46] J. Avendaño, and L. de la Peña, *Physica E* **42**, 313-316 (2010).