

# Criterios para el uso de la aproximación de onda rotante en el modelo de Rabi

Jean Claude Ducolomb, J. Avendaño

Instituto Politécnico Nacional

Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México

Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: jcducolomb@gmail.com

**Resumen** — En este artículo se presenta el desarrollo teórico en el cual está fundamentado el modelo de Rabi, siendo este un sistema semiclásico de un átomo de dos niveles de energía inmerso en radiación electromagnética dentro de una cavidad, así como la validez de la solución aproximada usando la aproximación de onda rotante (RWA) comparándola con la solución exacta calculada a través del software wolfram mathematica. Con lo cual se establecerán criterios para usar la aproximación de onda rotante de manera válida en dicho sistema.

**Palabras Clave** – RWA, sistema de dos niveles, modelo de Rabi.

**Abstract** — This article presents the theoretical development on which the Rabi model is based, this being a semiclassical system of a two-level atom within a cavity with electromagnetic radiation, as well as rotating wave approximation (RWA) validity by comparing it to the exact solution obtained using the wolfram mathematica software. Which will give criteria to the proper use of the rotating wave approximation in said system.

**Keywords** — RWA, two level system, Rabi model.

## I. INTRODUCCIÓN

El modelo de Rabi establece un interesante sistema que, al igual que otro sistema de dos niveles, puede semejarse a un qubit, esto además de ser interesante por sus posibles aplicaciones en tecnología ofrece un interesante punto de inicio para sistemas más complejos en el área de óptica cuántica debido a su aparente simplicidad al momento de resolver las ecuaciones que rigen al sistema auxiliándose en la aproximación de onda rotante, bastando resolver dos simples ecuaciones diferenciales de segundo orden con condiciones iniciales, sin embargo, es natural preguntarse en qué grado es válido el uso de tales aproximaciones y, más aún, qué criterios físicos han de considerarse al momento de decidir si dicha aproximación es útil para la resolución del sistema.

A continuación, se busca resolver dichas interrogantes para concretar la aproximación de onda rotante en sistemas como este.

## II. ÁTOMO INMERSO EN RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

El hamiltoniano correspondiente a un átomo en ausencia de campos externos

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{P}}^2 + V(r) , \quad (1)$$

$V$  es la energía potencial entre el electrón y el núcleo, la cual depende solamente de la distancia  $r = |\mathbf{r}|$  en el caso de que exista simetría esférica, y  $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla$  es el operador de momento. Partiendo de este hamiltoniano se obtiene el hamiltoniano de este átomo inmerso en un campo electromagnético efectuando simplemente la transformación  $\hat{H} \rightarrow \hat{H} + e\Phi$ ,  $\hat{\mathbf{P}} \rightarrow \hat{\mathbf{P}} + e\mathbf{A}$  de acuerdo con el principio de acoplamiento mínimo [1]

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{P}} + e\mathbf{A})^2 - e\Phi + V(r) , \quad (2)$$

$\mathbf{A}$  es el potencial vectorial y  $\Phi$  el potencial eléctrico asociados a la radiación electromagnética.

Considerando la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para dicho hamiltoniano

$$\hat{H}(\mathbf{r}, t)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} . \quad (3)$$

Se propone el operador unitario  $\hat{R}$  de tal manera que  $\Psi'(\mathbf{r}, t) = \hat{R}\Psi(\mathbf{r}, t)$  con

$$\hat{H}'\Psi'(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi'(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (4)$$

y

$$\hat{H}' = \hat{R}\hat{H}\hat{R}^\dagger + i\hbar \frac{\partial \hat{R}}{\partial t} \hat{R}^\dagger \quad (5)$$

eligiendo  $\hat{R} = e^{-ie\chi(\mathbf{r}, t)/\hbar}$  de tal manera se cumple

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{P}} + e\mathbf{A}')^2 - e\Phi' + V(r) . \quad (6)$$

Considerando las transformaciones de gauge [1,2] siguientes, el gauge de Coulomb  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  y el gauge de Göppert-Mayer  $\chi = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$  el hamiltoniano queda

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{P}}^2 + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) + V(r) . \quad (7)$$

Cabe mencionar que el término  $-e\mathbf{r}$  corresponde al momento dipolar  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$  el cual escribiremos como el operador momento dipolar  $\hat{\mathbf{d}} \equiv -e\hat{\mathbf{r}}$ , así queda

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{P}}^2 + V(r) - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t). \quad (8)$$

Dicho hamiltoniano se puede separar en dos

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 + \hat{H}_p = \hat{H}_0 - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t) \quad (9)$$

donde  $\hat{H}_0$  es el hamiltoniano atómico libre y  $\hat{H}_p$  es el hamiltoniano de interacción entre el átomo y la radiación. Este último se puede tratar como una perturbación dependiente del tiempo.

Suponiendo que la forma del campo eléctrico es la de una onda sinusoidal [3,8],  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ , dicha suposición es válida pues se están considerando distancias interatómicas, con lo cual el campo electromagnético es prácticamente constante en dicha región, está es llamada la aproximación dipolar [5].

Con lo que el hamiltoniano perturbativo se escribe como sigue

$$\hat{H}_p = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0 \cos \omega t. \quad (10)$$

Considerando ahora el sistema compuesto por un átomo de dos niveles energéticos inmerso en la radiación electromagnética, la función de onda que describe al sistema de dos niveles tiene la forma

$$\Psi = c_0 e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} \psi_0 + c_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \psi_1, \quad (11)$$

donde el estado  $\psi_1$  corresponde al estado excitado y  $\psi_0$  al estado base y ambos estados son ortogonales y están normalizados, siendo  $E_1$  y  $E_0$  las energías correspondientes.

Usando la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (12)$$

con el hamiltoniano (9) nos lleva [4] a la ecuación

$$c_0 \hat{H}_p \psi_0 e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} + c_1 \hat{H}_p \psi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} = i\hbar \left( \dot{c}_0 \psi_0 e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} + \dot{c}_1 \psi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \right). \quad (13)$$

Ahora bien, si se proyecta la ecuación anterior sobre los estados  $\psi_0$  y  $\psi_1$ , considerando la ortonormalidad [4,5] de los estados se obtienen las siguientes ecuaciones respectivamente [6]

$$\dot{c}_0 = -\frac{i}{\hbar} H'_{01} e^{-i\omega_0 t} c_1 \quad (14)$$

$$\dot{c}_1 = -\frac{i}{\hbar} H'_{10} e^{i\omega_0 t} c_0 \quad (15)$$

con  $H'_{ij} \equiv \langle \psi_i | \hat{H}_p | \psi_j \rangle$  y  $\omega_0 \equiv \frac{E_1 - E_0}{\hbar}$ .

Considerando la forma explícita del hamiltoniano perturbativo  $\hat{H}_p$  (10), las ecuaciones se transforman en

$$\dot{c}_0 = -\frac{i(\mathbf{d}_{01} \cdot \mathbf{E}_0)}{\hbar} \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} c_1 \quad (16)$$

$$\dot{c}_1 = -\frac{i(\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{E}_0)}{\hbar} \cos(\omega t) e^{i\omega_0 t} c_0 \quad (17)$$

donde  $\mathbf{d}_{ij} \equiv \langle \psi_i | \hat{\mathbf{d}} | \psi_j \rangle$ .

Expandiendo el coseno en términos de exponenciales

$$\dot{c}_0 = -\frac{i(\mathbf{d}_{01} \cdot \mathbf{E}_0)}{2\hbar} (e^{i(\omega - \omega_0)t} + e^{-i(\omega + \omega_0)t}) c_1 \quad (18)$$

$$\dot{c}_1 = -\frac{i(\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{E}_0)}{2\hbar} (e^{i(\omega + \omega_0)t} + e^{i(\omega_0 - \omega)t}) c_0. \quad (19)$$

Por simplicidad definiremos las siguientes magnitudes  $\omega_{\pm} \equiv \omega \pm \omega_0$  y  $A_{ij} = -\frac{\mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{E}_0}{2\hbar}$ , con lo que finalmente las ecuaciones (18) y (19) quedan como

$$\dot{c}_0 = iA_{01}(e^{i\omega_- t} + e^{-i\omega_+ t})c_1 \quad (20)$$

$$\dot{c}_1 = iA_{10}(e^{i\omega_+ t} + e^{-i\omega_- t})c_0. \quad (21)$$

### III. APROXIMACIÓN DE ONDA ROTANTE

La aproximación de onda rotante (RWA) desprecia los términos exponenciales que tienen  $\omega_+$  [6,7,8] de las ecuaciones anteriores, los cuales son llamados los términos contrarrotantes [7], obteniendo así

$$\dot{c}_0 = iA_{01}e^{i\omega_- t}c_1 \quad (22)$$

$$\dot{c}_1 = iA_{10}e^{-i\omega_- t}c_0. \quad (23)$$

Para obtener un sistema de ecuaciones con el cual se pueda trabajar más cómodamente, se despejan los términos lineales de las ecuaciones, para después derivarlas, y posteriormente obtener dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, llegando a

$$\ddot{c}_0 - i\omega_- \dot{c}_0 + A^2 c_0 = 0 \quad (24)$$

$$\ddot{c}_1 + i\omega_- \dot{c}_1 + A^2 c_1 = 0 \quad (25)$$

donde  $A^2 = |A|^2$ , pues es fácil ver que  $A_{ij} = A_{ji}^*$  a partir de la definición de  $d_{ij}$ .

Considerando las condiciones iniciales  $c_0(0) = 1$  y  $c_1(0) = 0$  se obtiene de las ecuaciones la solución

$$c_1(t) = 2i \frac{A}{\Omega_R} e^{-\frac{i}{2}\omega_- t} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2} t\right), \quad (26)$$

donde  $\Omega_R = \left(\omega_-^2 + \frac{A^2}{2\hbar^2}\right)^{1/2}$  es llamada la frecuencia de Rabi [8].

De aquí se sigue que la probabilidad de transición al estado final es

$$P_{0 \rightarrow 1}(t) = |c_1(t)|^2 = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0)^2}{\hbar^2 \Omega_R^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_R}{2} t\right). \quad (27)$$

#### IV. SOLUCIÓN EXACTA

Para la solución exacta se parte desde las ecuaciones (18) y (19), tomando  $\mathbf{d}_{10} = \mathbf{d}_{01}$ , es decir, que la componente imaginaria de  $\mathbf{d}_{10}$  se anule, por la arbitrariedad de fase en la función de onda [5], y se define la nueva variable  $\tau$  como un reescalamiento del tiempo  $t$ , como sigue

$$\tau = \left(\frac{1}{2\hbar} \mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{E}_0\right) t, \quad (28)$$

de manera que se obtienen las ecuaciones

$$\frac{dc_0}{d\tau} = \dot{c}_0 = -i(e^{i\Delta\tau} + e^{-i\Gamma\tau})c_1, \quad (29)$$

$$\frac{dc_1}{d\tau} = \dot{c}_1 = -i(e^{i\Gamma\tau} + e^{-i\Delta\tau})c_0, \quad (30)$$

con  $\Delta = \frac{2\hbar}{\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{E}_0} \omega_-$  y  $\Gamma = \frac{2\hbar}{\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{E}_0} \omega_+$ , considerando las condiciones iniciales  $c_0(0) = 1$  y  $c_1(0) = 0$  se puede resolver numéricamente el problema usando un software, en este caso se usó mathematica versión 12.3.

Claramente para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales es necesario definir antes un valor para  $\Delta$  y  $\Gamma$  por lo tanto, se harán los análisis fijando un valor para uno y sistemáticamente variando el otro.

Primero analicemos el sistema en resonancia, es decir,  $\Delta = 0$

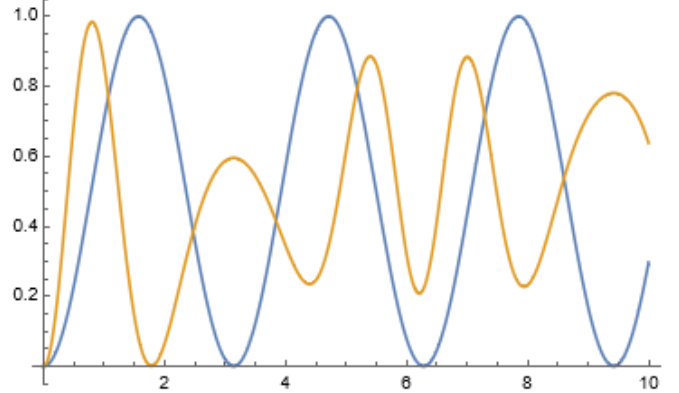


Fig. 1. Gráfica de la evolución temporal,  $\tau$  en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados  $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$  en el eje vertical, para valores de  $\Delta = 0$  y  $\Gamma = 1$ . La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

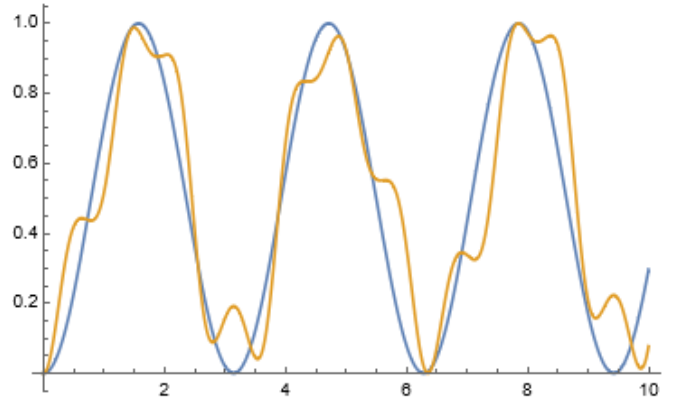


Fig. 2. Gráfica de la evolución temporal,  $\tau$  en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados  $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$  en el eje vertical, para valores de  $\Delta = 0$  y  $\Gamma = 5$ . La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

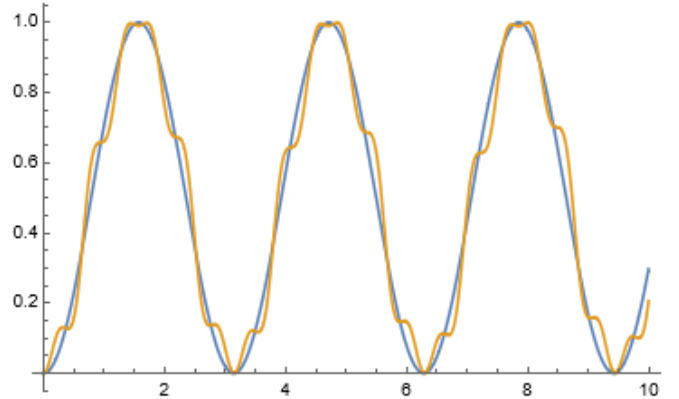


Fig. 3. Gráfica de la evolución temporal,  $\tau$  en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados  $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$  en el eje vertical, para valores de  $\Delta = 0$  y  $\Gamma = 10$ . La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

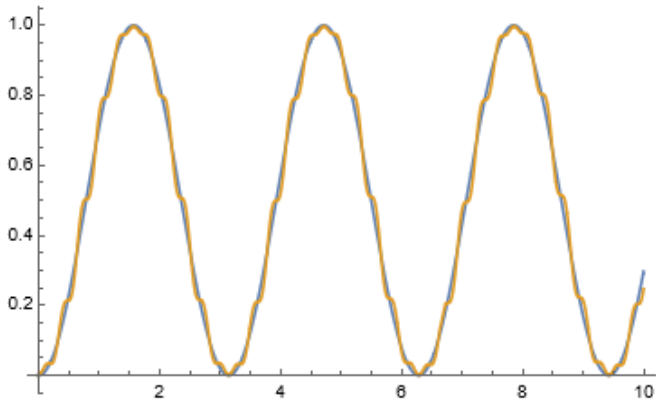


Fig. 4. Gráfica de la evolución temporal,  $\tau$  en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados  $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$  en el eje vertical, para valores de  $\Delta = 0$  y  $\Gamma = 20$ . La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

De aquí podemos ver que a pesar de encontrarse en resonancia no todos los valores de  $\Gamma$  hacen válida la solución de aproximación de onda rotante, sino que a medida que aumenta  $\Gamma$  la aproximación de onda rotante empieza a ser cada vez más válida, sin embargo, consideremos los casos fuera de resonancia

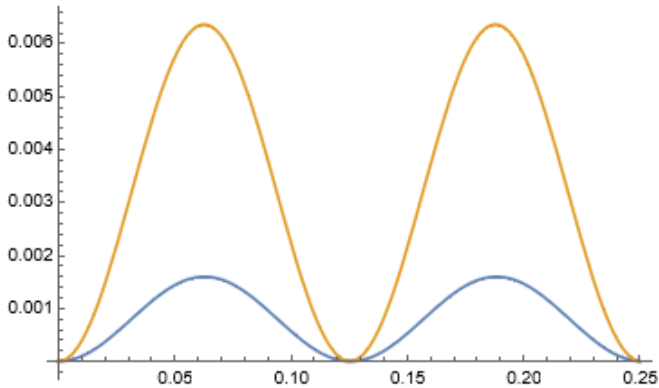


Fig. 5. Gráfica de la evolución temporal,  $\tau$  en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados  $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$  en el eje vertical, para valores de  $\Delta = -50$  y  $\Gamma = 50$ . La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

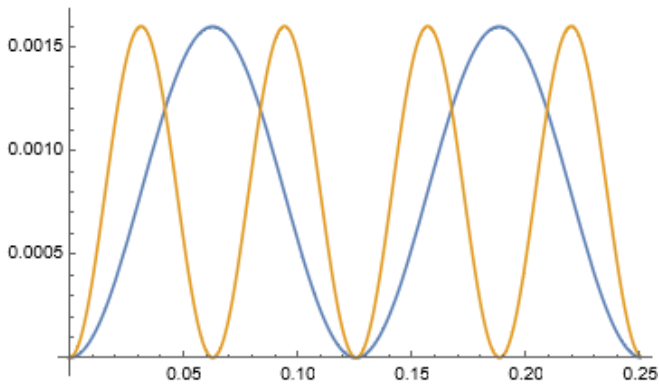


Fig. 6. Gráfica de la evolución temporal,  $\tau$  en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados  $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$  en el eje vertical, para valores de  $\Delta = 50$  y  $\Gamma = 50$ . La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

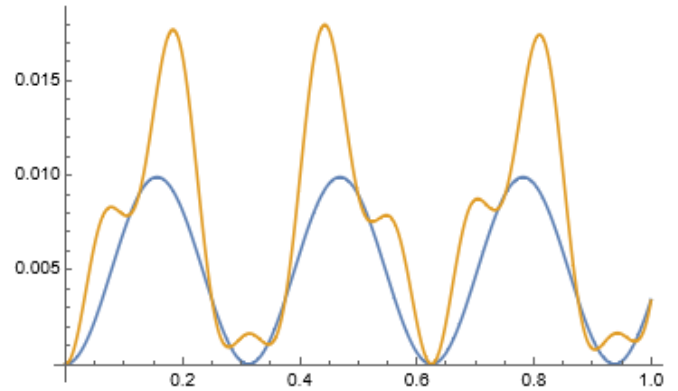


Fig. 7. Gráfica de la evolución temporal,  $\tau$  en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados  $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$  en el eje vertical, para valores de  $\Delta = -20$  y  $\Gamma = 20$ . La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

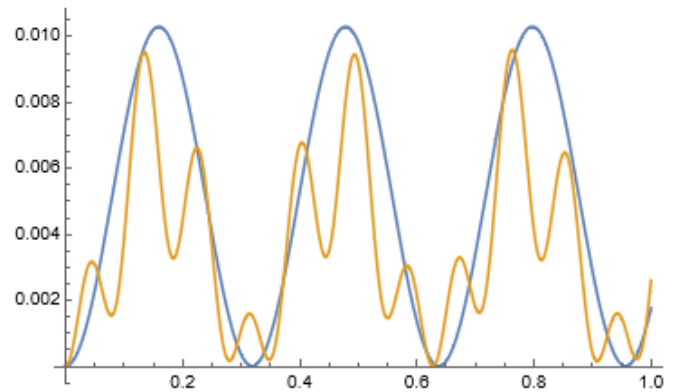


Fig. 8. Gráfica de la evolución temporal,  $\tau$  en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados  $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$  en el eje vertical, para valores de  $\Delta = 20$  y  $\Gamma = 20$ . La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

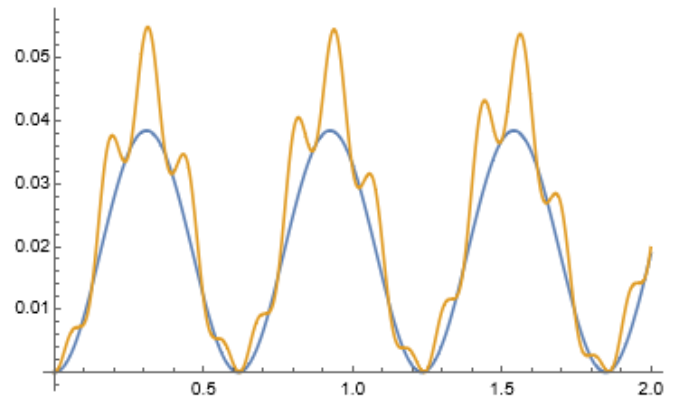


Fig. 9. Gráfica de la evolución temporal,  $\tau$  en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados  $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$  en el eje vertical, para valores de  $\Delta = -10$  y  $\Gamma = 10$ . La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

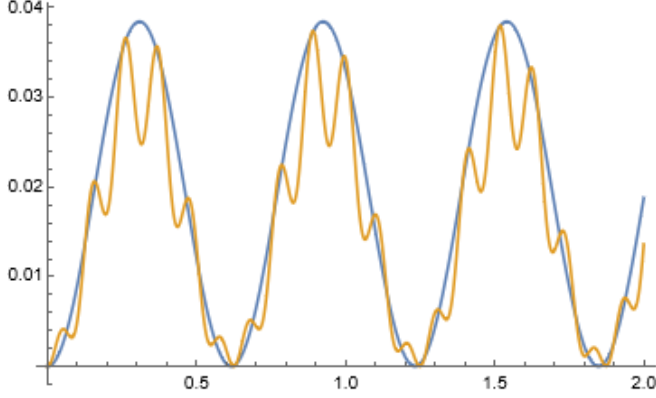


Fig. 10. Gráfica de la evolución temporal,  $\tau$  en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados  $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$  en el eje vertical, para valores de  $\Delta = 10$  y  $\Gamma = 10$ . La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

De aquí se pueden observar varios detalles, para valores pequeños de  $|\Delta|$  en comparación con  $\Gamma$  la aproximación de onda rotante es aproximadamente una envolvente de la solución exacta (Figuras 1, 2, 3, 4), más aún para un  $\Delta$  negativo la aproximación resulta envolver a la solución exacta inferiormente (Figuras 5, 7, 9) mientras que para un  $\Delta$  positivo la envuelve superiormente (Figuras 6, 8, 10) como se puede apreciar en las gráficas. Dado que la solución en la aproximación de onda rotante tiene la forma

$$P_{0 \rightarrow 1}(\tau) = \frac{4}{\Delta^2 + 4} \sin^2\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + 4}}{2} \tau\right), \quad (31)$$

se ve que depende de  $\Delta^2$ , es decir, que la solución aproximada para un  $\Delta$  dado es la misma que para su negativo  $-\Delta$ , con lo que se puede concluir que la probabilidad de transición exacta es mayor para un valor negativo de  $\Delta$  que su contraparte positiva.

Además, conforme incrementa  $|\Delta|$ , acercándose a  $\Gamma$ , la aproximación se desfasa con respecto a la solución exacta manteniendo una amplitud igual para un  $\Delta$  positivo (Figura 6), mientras que para un  $\Delta$  negativo la aproximación tiene la misma fase, pero con una menor amplitud (Figura 5).

Por último, las amplitudes tanto de la aproximación como de la solución exacta se vuelven menores a medida que incrementa  $\Delta$  de tal manera que aun considerando los casos extremos en los cuales  $|\Delta| = \Gamma$  las probabilidades se desploman a casi 0 como se puede ver en las figuras 5 y 6.

#### IV. CRITERIOS DE APROXIMACIÓN

Teniendo en consideración el comportamiento ya estudiado de la aproximación a partir de las magnitudes  $\Gamma$  y  $\Delta$ , la única condición que basta para considerar la aproximación de onda rotante es que  $\Gamma \gg 1$ , lo cual por sí sólo puede resultar ambiguo, pues surge la pregunta natural de qué tan grande

debe ser  $\Gamma$  para que podamos considerar que se cumple  $\Gamma \gg 1$ , lo que se logró apreciar de las gráficas fue que a partir del valor  $\Gamma = 20$  la aproximación de onda rotante es una buena aproximación, sin embargo, entre mayor sea, mejor aproximará al sistema.

No obstante, no hay que olvidar lo que representa  $\Gamma$  físicamente, recordemos que fue definido como

$$\Gamma = \frac{2\hbar(\omega + \omega_0)}{\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{E}_0}, \quad (32)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de la radiación electromagnética,  $\omega_0$  es la frecuencia de resonancia,  $E_0$  es el campo eléctrico inicial con amplitud  $E_0$  y  $\mathbf{d}_{10}$  es el valor esperado entre los dos estados del átomo de un vector relacionado con el momento dipolar asociado al átomo el cual tiene la misma orientación.

Si se considera a  $\theta$  como el ángulo entre los vectores de momento dipolar del átomo  $\mathbf{d}_{10}$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E}_0$ , y tomando sólo en cuenta podemos reescribir

$$\Gamma \propto \frac{\omega + \omega_0}{dE_0 \cos(\theta)}. \quad (33)$$

Así, las condiciones físicas que pueden llevar a que la RWA sea usada como una aproximación válida para un problema de este tipo son las siguientes:

1. La intensidad del campo electromagnético aplicado sea pequeña
2. El momento dipolar sea pequeño
3. La frecuencia de la radiación domine a la frecuencia de resonancia
4. La frecuencia de resonancia domine a la frecuencia de la radiación

en cualquier combinación.

Cabe mencionar algunos detalles respecto a las condiciones físicas anteriormente mencionadas, en el caso de que se cumpla la cuarta condición se tendrá  $\Gamma \approx -\Delta$  lo cual significa que la probabilidad de transición sea prácticamente nula, lo cual coincide con el hecho físico de que al considerar la frecuencia de resonancia grande implica que la separación entre los niveles energéticos entre estados es muy grande, dificultando así la transición y por consiguiente anulando la probabilidad del evento.

Pasa algo similar al considerar exclusivamente la tercera condición, pues se tendrá  $\Gamma \approx \Delta$  y de nuevo se anulará la probabilidad, lo cual se puede entender físicamente como que el campo oscila tan rápidamente que no permite al átomo un acoplamiento efectivo.

Ahora bien, las condiciones dos y cuatro son condiciones que no se pueden alterar libremente en el sistema, pues éstas son

características intrínsecas del átomo del sistema por lo cual están fuera de nuestro control más allá de poder elegir el átomo.

Es entonces la primera condición la que resulta más interesante pues es la condición que se puede controlar mejor y conduce, en la mayoría de los casos, a una probabilidad de transición considerable siempre y cuando se module la frecuencia de la radiación para que la  $\omega$  no domine a  $\omega_0$  y viceversa.

Por otro lado, se ha estado hablando de valores grandes y pequeños, pero no se ha dado una escala concreta con la cual establecer un criterio claro, por lo cual procederemos a detallar esta cuestión. Antes se mencionó que para un valor de  $\Gamma > 20$  se podría usar la aproximación de onda rotante como una aproximación válida, pero ¿Qué significa esto en términos de las variables y valores físicos recién discutidos? Para responder esto tomemos la ecuación (36)

$$\Gamma = \frac{2\hbar}{\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{E}_0} \omega_+ . \quad (34)$$

Señalemos de nuevo que es una magnitud adimensional y sustituyamos el criterio en la definición

$$\frac{2\hbar}{\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{E}_0} \omega_+ > 20 . \quad (35)$$

Luego, si se trabaja en el sistema internacional de unidades considerando que la constante de Planck es  $\hbar \approx 4.14 \times 10^{-15} \text{ eVs}$  y la definición del momento dipolar se tiene

$$\frac{8.28 \times 10^{-15}}{r_{10} E_0 \cos \theta} \omega_+ = \frac{8.28 \times 10^{-15}}{|\langle \psi_1 | \mathbf{r} | \psi_0 \rangle| E_0 \cos \theta} \omega_+ > 20 , \quad (36)$$

$$|\langle \psi_1 | \mathbf{r} | \psi_0 \rangle| E_0 \cos \theta < \frac{8.28 \times 10^{-15}}{20} \omega_+ = 4.14 \times 10^{-16} \omega_+ .$$

Recordemos adicionalmente que  $\omega = kc$ , donde  $k$  es del orden de  $10^7 \text{ m}^{-1}$  debido a que se está considerando la aproximación dipolar [5], por lo que  $\omega \approx 3 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ , así  $\omega_+ = \omega + \omega_0 \approx 3 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}_{10}}{e^-} \cdot \mathbf{E}_0 &= |\langle \psi_1 | \mathbf{r} | \psi_0 \rangle| E_0 \cos \theta < \frac{8.28 \times 10^{-15}}{20} \omega_+ \\ &\approx 4.14 \times 10^{-16} 3 \times 10^{15} = 1.242 . \end{aligned} \quad (37)$$

Donde recordemos que  $|\langle \psi_1 | \mathbf{r} | \psi_0 \rangle|$  o su equivalente  $\frac{d_{10}}{e^-}$  es una característica intrínseca del átomo estudiado.

De esta manera mientras que se cumpla la condición (37) se podrá considerar la aproximación de onda rotante en el modelo de Rabi.

## V. CONCLUSIONES

El modelo de Rabi es un modelo importante para dar los primeros pasos hacia varias ramas del mundo cuántico como la óptica cuántica, teoría cuántica de campos, teoría cuántica de la información etcétera, la aproximación de onda rotante en dicho modelo es parte crucial para la resolución analítica del sistema. Por estas razones es importante saber bajo qué condiciones físicas es aceptable realizar la aproximación de onda rotante. Tras haberse analizado los criterios que puede alterar la efectividad de la aproximación, se llegó a la relación que se debe de cumplir de manera aproximada para poder usar dicha aproximación y que el resultado sea suficientemente válido comparado con el real. Siendo este, en resumidas cuentas, un campo electromagnético débil para poder despreciar los términos contrarrotantes.

Por otro lado, aunque el criterio fue establecido bajo el sistema que describe el modelo de Rabi, siendo un sistema semiclásico, es posible generalizar los criterios para sistemas totalmente cuánticos estableciendo las equivalencias entre los parámetros físicos concernientes.

## AGRADECIMIENTOS

J. Avendaño agradece el apoyo proporcionado por la COFAA-IPN y por la Secretaría de investigación y Posgrado del IPN a través del proyecto SIP20220073.

## REFERENCIAS

- [1] Peter W. Milonni. (2019). An introduction to quantum optics and quantum fluctuations. Oxford university press.
- [2] Tom Lancaster, Stephen J. Blundell. (2014). Quantum field theory for the gifted amateur. Oxford university press.
- [3] G. Gilbert, A. Aspect, C. Fabre. (2010). Introduction to quantum Optics. Cambridge university press.
- [4] Nouredine Zetilli. (2009). Quantum Mechanics: Concepts and applications. John Wiley and Sons, Ltd.
- [5] Claude Cohen-Tanoudji, Bernard Diu, F. Laloë. (). Quantum mechanics.
- [6] David J. Griffiths, Darrell F. Schroeter. (2018). Introduction to quantum mechanics. Cambridge university press.
- [7] Dujie Bonacci. (2018). Rabi spectra - a simple tool for analyzing the limitations of RWA in modelling of the selective population transfer in many-level quantum systems. Physics review.
- [8] Christopher C. Gerry, Peter L. Knight. (2005). Introductory quantum optics. Cambridge university press.