Problema sutil de una integral doble impropia

Carlos López Lima[1] y Verónica Lucero Villegas Rueda[2]
[1]Departamento de Física, ESFM-IPN, CDMX., México
[2]Departamento de Ciencias Básicas UPPITA-IPN, CDMX, México
e-mail: carlosomega40@hotmail.es

Resumen — **Se presentan dos soluciones al problema 5 del capítulo 15 de [1], donde el autor propone calcular una integral impropia de dos variables. La primera solución, se hace un desarrollo en serie del integrando, se integra y se calcula el límite de la serie con resultados de variable compleja. Segunda solución, se hace un cambio de dos variables y se evalúa sin la necesidad de utilizar variable compleja. Finalmente, se discute la importancia de la segunda solución para alumnos que están cursando cálculo de varias variables.**

Palabras Clave – **Integral impropia, cambio de variables, series**

Abstract — **Two solutions to problem 5 of chapter 15 of [1] are presented, where the author proposes to calculate an improper integral of two variables. The first solution, a series development of the integrand is made, it is integrated and the limit of the series is calculated with complex variable results. Second solution, a change of two variables is made and evaluated without using a complex variable. Finally, the importance of the second solution for students who are studying multivariate calculus is discussed.**

Keywords — **Improper integral, change of variables, series**

I. Introducción

El problema de la integral doble de [1] propone resolver

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1-xy} \tag{1}$$

donde (1) es una integral impropia y se define como el límite de la integral sobre el rectángulo $[0,t]\times[0,t]$ cuando $t\to 1^-$.

Considerando la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}; \quad |x|<1. \tag{2}$$

Al sustituir el integrando de (1) con argumento xy en (2)

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Como se integra dentro del radio de convergencia se puede integrar término a término en (3) y utilizar el teorema de Fubini para obtener

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1-xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{4}$$

En la sección II se explicará como calcular el límite de (4) por dos caminos. Un estudiante que no ha llevado un curso de variable compleja puede omitir el primer método (Sec. II.A) y pasar al segundo método (Sec. II.B).

II. Metodología

En esta sección procedemos a calcular la integral de (1) por dos formas distintas, el primero utiliza resultados vistos de un curso de variable compleja y el segundo utiliza resultados de un curso de cálculo de varias variables, ambos cursos fundamentales para un alumno en el área Ciencias Básicas e Ingeniería.

A. Cálculo a partir de variable compleja

Considerando los resultados de variable compleja se procede a calcular el límite de la serie infinita en (4) con

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{i=1}^{K} \mathrm{Res}^*[\pi\cot(\pi z)\, f(z), z = z_i] \tag{5}$$

donde el lado derecho de (5) es menos la sumatoria de los residuos de $\pi\cot(\pi z)\, f(z)$, en los polos de $f(z)$, con z un número complejo. Se puede consultar [2] para llegar a la formula (5).

Por otra parte, si $f(z) = 1/(z^2+a^2)$, con a un número real positivo ($a>0$) esta función tiene dos polos simples en $z=\pm ia$.

Al calcular el residuo de $\pi\cot(\pi z)\, f(z)$ en $z = ia$

$$\lim_{z\to ia} \frac{z-ia}{z^2+a^2}\pi\cot\pi z = \frac{\pi}{2ai}\cot\pi a = -\frac{\pi}{2a}\coth\pi a \tag{6}$$

y de forma similar se calcula el residuo en el polo $z=-ia$

*Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP-20221210

$$\lim_{z\to -ia}\frac{z+ia}{z^2+a^2}\pi\cot\pi z = -\frac{\pi}{2a}\coth\pi a \tag{7}$$

Al sustituir (6) y (7) en (5) se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{a}\coth\pi a\,; \quad a>0 \tag{8}$$

donde (8) se puede reescribir considerando a la sumatoria como una función par en la variable n, y se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}\coth\pi a-\frac{1}{2a^2}; \quad a>0 \tag{9}$$

Finalmente, note que (9) puede calcular la serie (4), cuando $a\to 0$, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{a\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \lim_{a\to 0}\frac{\pi a\coth\pi a-1}{2a^2}; \quad a>0 \tag{10}$$

Utilizando el Teorema de l'Hôpital en (10) obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{11}$$

B. Cálculo a partir de cálculo de varias variables

Considere el cambio de dos variables para (1)

$$x=\frac{u-v}{\sqrt{2}}; \quad y=\frac{u+v}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

El determinante de la matriz jacobiana

$$\det\left(J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)\right)=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=1 \tag{13}$$

donde $u_\xi=\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $v_\xi=\frac{\partial v}{\partial \xi}$; con $\xi=x,y$.

Note al sumar $x+y$, sustituir (12) y despejar u

$$x+y=\frac{u-v}{\sqrt{2}}+\frac{u+v}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}u\Rightarrow u=\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \tag{14}$$

y de forma similar al restar $x-y$, sustituir (12) y despejar v

$$v=\frac{y-x}{\sqrt{2}} \tag{15}$$

En (14) y (15) se tiene las funciones u,v como funciones de las variables x,y. Además, con (14) y (15) se obtiene la región de integración en el plano UV. Primero, cuando $y=0$ con $0\le x\le 1$, entonces $0\le u\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $0\ge v\ge -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Segundo, si $x=1$ con $0\le y\le 1$, entonces $\frac{1}{\sqrt{2}}\le u\le\sqrt{2}$ y $-\frac{1}{\sqrt{2}}\le v\le 0$. Tercero, si $y=1$ con $1\ge x\ge 0$, entonces $\sqrt{2}\ge u\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $0\le v\le\frac{1}{\sqrt{2}}$. Cuarto, si $x=0$ con $1\ge y\ge 0$, entonces $\frac{1}{\sqrt{2}}\ge u\ge 0$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}\ge u\ge 0$. Este recorrido se muestra en la Fig. (1)

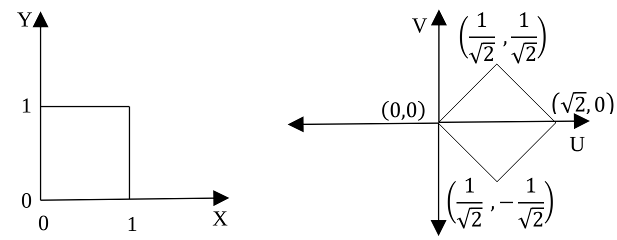

Fig. 1. Representación de la región de integración de la ecuación (1) en plano XY (izquierda) y en el plano UV (derecha) es la región de integración de (1) bajo el cambio de dos variables (12).

Así que al considerar la frontera del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ en el plano XY se construye un cuadrado rotado $\frac{\pi}{4}$ respecto al origen en el plano UV.

La integral (1) se transforma

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1-xy}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}u\int_{-u}^{u}\frac{2\,\mathrm{d}v}{2-(u^2-v^2)} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{2}+u}^{\sqrt{2}-u}\frac{2\,\mathrm{d}v}{2-(u^2-v^2)} \tag{16}$$

Al integrar con respecto a v la primera integral del lado derecho (16)

$$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}u\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{2-u^2}}\right)\right]_{-u}^{u} \tag{17}$$

Análogamente, se integra respecto v la segunda integral del lado derecho de la igualdad en (16)

$$2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}u\frac{1}{\sqrt{2-u^2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{2-u^2}}\right)\right]_{-\sqrt{2}+u}^{\sqrt{2}-u} \tag{18}$$

al evaluar los límites de integración en (17) y (18)

$$4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right)}{\sqrt{2-u^2}}\mathrm{d}u + 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2-u^2}}\right)}{\sqrt{2-u^2}}\mathrm{d}u \tag{19}$$

Ahora, si $u=\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$ entonces $\mathrm{d}u=\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$. Para la primera integral en (19) los límites de integración van de 0 a $\frac{\pi}{6}$. Para la segunda integral en (19) los límites de integración van de $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{2}$. Sustituyendo el cambio de variable en (19) se encuentra

$$4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{2}\cos(\theta)}\right)}{\sqrt{2}\cos(\theta)}\sqrt{2}\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta + 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{2}\cos(\theta)}\right)}{\sqrt{2}\cos(\theta)}\sqrt{2}\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{20}$$

simplificando términos y utilizando la propiedad de función inversa en la primera integral en (20) se llega a

$$4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\theta\,\mathrm{d}\theta + 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{1-\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}\right)\mathrm{d}\theta \tag{21}$$

Para resolver la segunda integral en (21), hay que rescribir el argumento de $\tan^{-1}$, se utilizan las propiedades de suma y diferencia de ángulos del seno y coseno trigonométricos ($\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\pm\operatorname{sen}\beta\cos\alpha$ y $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$),

$$\begin{aligned}\frac{1-\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} &= \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\\ &= \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned} \tag{22}$$

Al sustituir (22) en la segunda integral de (21) se utiliza la propiedad de la función inversa e integrando se obtiene

$$4\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + 4\left[\frac{\pi}{4}\theta-\frac{\theta^2}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^2}{9}=\frac{\pi^2}{6} \tag{23}$$

III. Resultados

El primer procedimiento necesita como requisitos desarrollar funciones en series geométricas, integración de series, identidades trigonométricas complejas y cálculo de una serie por el teorema del residuo.

El segundo procedimiento necesita tener conocimientos para el cambio de dos variables, que está relacionado a una transformación lineal como se indica en (12), cálculo de la matriz Jacobiana y su determinante (13), cambio de la región de integración Fig. 1, cambio de una variable (20), propiedad de la función inversa (21) suma y diferencia de ángulos en las funciones trigonométricas seno y coseno (22) e integrar.

Los resultados obtenidos en (11) y (23) por los procedimientos de Sec. II.A y Sec. II.B respectivamente es el mismo $(\pi^2/6)$ y son procedimientos distintos.

IV. Discusión

En primera instancia podemos notar que el primer procedimiento que considera variable compleja es más corto que el segundo procedimiento que utiliza cálculo de varias variables. Pero, para un alumno que está cursando cálculo de varias variables no se puede utilizar el primer procedimiento para resolver (1) así que se debe utilizar el segundo procedimiento.

Aunque este problema se aborda en un curso de variable compleja, como ya se mostró en el segundo procedimiento se puede abordar el problema desde un curso de cálculo de varias variables. El segundo procedimiento aplica temas vistos en un curso de cálculo de varias variables y cálculo de una variable como se menciona en la Sec. III.

V. Conclusiones

Después de comparar los dos procedimientos y llegar al mismo resultado (11) y (23), recomendamos el segundo procedimiento para explicar la integral (1) para un curso de cálculo de varias variables.

Aunque hay variantes del cálculo de la serie (4) por medio de productos infinitos o por la aplicación de series Laurent estos temas no están al alcance para un alumno que está cursando cálculo de varias variables. Sin embargo, estos análisis se pueden considerar para un trabajo posterior.

Referencias

[1] Stewart, James, *Cálculo De Varias Variables: Trascendentes Tempranas*, 7ed Cengage Learning, 2012, p. 1053.

[2] R. Spiegel, Murray, *Variable compleja*, 2ed McGRAW-HILL, 2011, pp. 205–241.