Diagonalización de un Hamiltoniano con una estructura lineal de los generadores del álgebra de Lie $su(1,1)$ y $su(2)$.

Dr. Enrique Choreño Ortiz[1], Dr. Raúl Valencia Torres[2]
[1] Instituto Politécnico Nacional, UPIEM, Ciudad de México, 07738, México.
[2] Instituto Politécnico Nacional, UPIITA, Departamento de Matemáticas, Ciudad de México, 07340, México
E-mail: echorenoo.ipn.mx, rvalenciat@ipn.mx

Resumen —En el presente trabajo se describe un procedimiento algebraico, mediante el operador de desplazamiento $D(\xi)$, para diagonalizar ciertos Hamiltonianos de sistemas físicos que se pueden describir por medio de una estructura lineal de los generadores del álgebra de Lie. Posteriormente, como una aplicación de la teoría desarrollada, se diagonalizan un Hamiltonianos con una estructura simple dada en términos de las álgebras de Lie $su(1,1)$ y $su(2)$.

Palabras Clave – **Álgebras de Lie, teoría de grupos.**

Abstract — In this paper an algebraic approach is described, by means of the displacement operator D(ξ), to diagonalize certain Hamiltonians of physical systems that can be described by means of a linear structure of the Lie algebra. Subsequently, as a simple but useful application of the developed theory, two Hamiltonians with a simple structure given in terms of the Lie algebras su(1, 1) and su(2) are diagonalized.

Keywords — **Lie algebra, group theory.**

I. INTRODUCCIÓN

Como es bien conocido, los métodos algebraicos relacionados con teoría de grupos son herramientas muy poderosas en la descripción, diagonalización y comprensión de sistemas físicos de problemas con cierta simetría. Por ejemplo, sistemas con simetría SO(3) o SU(2) los cuales a veces pueden ser descritos mediante los operadores de momento angular L_x, L_y y L_z. Un ejemplo mucho más básico y explotado por generaciones de físicos y estudiantes de física en donde se muestra de manera efectiva el uso de los conceptos de grupos y álgebras de Lie es el oscilador armónico cuántico. Mediante la introducción de los operadores de no-hermitianos $a^\dagger$, a y $N = aa^\dagger$ conocidos como los operadores de creación, aniquilación y de número, estos operadores permiten encontrar todos los estados y niveles de energía del oscilador armónico cuántico, por otro lado, estos operadores forman el álgebra de Heisenberg-Weyl por lo que también se les conoce como generadores del grupo de Weyl, además en este grupo el operador de desplazamiento es de la forma $D(\alpha) = \exp\{\alpha a^\dagger - \alpha^* a\}$ [1], este operador permite introducir operadores de mínima incertidumbre llamados estados coherentes de Klauder-Glauber [2][3] mediante la aplicación del operador de desplazamiento sobre el estado base de oscilador armónico. Recientemente, las técnicas algebraicas basadas en estructuras de grupos han demostrado ser útiles en la descripción de problemas mucho más complejos como por ejemplo problemas de estados ligados en una variedad de campos. Estos incluyen, entre otros, los espectros de rotación-vibracional de los núcleos [4] y los espectros de rotación-vibracional de moléculas [5].

Brevemente se mostrará en este trabajo una interesante y de manera simple aplicación del operador de desplazamiento para la diagonalización de Hamiltonianos de algunos sistemas que se puedan escribir, en particular, de manera lineal en términos de los generadores álgebra de Lie de estos grupos, como por ejemplo el modelo de Tavis-Cummings cuyo hamiltoniano se puede escribir de manera linean en términos de los generadores del grupo $S(1,1)$ o $SU(2)$.

El modelo de Tavis-Cummings es una generalización del modelo de Jaynes-Cummings y, por razones históricas, el modelo de Tavis-Cummings es a menudo llamado el modelo de Dicke. Al estudiar el modelo de Tavis-Cummings y algunas de sus diversas modificaciones algebraicas se han utilizado métodos, como la transformación de Holstein-Primakoff [6], la inversa cuántica [7,8] y álgebras $su(2)$ deformadas polinomialmente [9]. Sin embargo, se ha demostrado que, bajo ciertas consideraciones, la aproximación de onda rotante falla en la descripción de los fenómenos y no puede ser despreciada [10, 11]. El modelo de Jaynes-Cummings y su generalización dada por el modelo de Tavis-Cummings están todavía en estudio como se puede ver en referencias [12,13,14]. En particular, estos dos modelos se han utilizado en información cuántica y en el estudio del circuitos QED tal y como se muestra en [15,16,17].

II. MÉTODO GENERAL DE DIAGONALIZACIÓN

En la naturaleza existen sistemas físicos cuyos Hamiltonianos puede escribirse en términos de los generadores, por ejemplo $\{N_i, A_q. A_q^\dagger\}$, de alguna álgebra de Lie g como una combinación lineal. Es decir, Hamiltonianos de la forma

$$H = \sum_i a_i N_i + \sum_q \left(b_q A_q + c_q A_q^\dagger\right), \qquad (1)$$

en donde a_i, b_q y c_q son constantes reales o complejas. Los generadores $\{N_i, A_q. A_q^\dagger\}$, son un álgebra de Lie g dada por las relaciones de conmutación

$$[N_i, N_j] = 0, \qquad [N_i, A_q] = q_i A_q, \qquad [A_q, A_q^\dagger] = q^i N_i,$$

$$[A_p, A_q] = C_{p,q} A_{p+q} \ \ (p \neq q)$$

a veces conocida como la álgebra de Cartan-Weyl.

En general, basado en un álgebra de Lie g y en sus respectivos generadores $\{N_i, A_q. A_q^\dagger\}$ se puede introducir un operador unitario

$$D(\xi_q) = \sum_q (\xi_q A_q - \xi_q^* A_q^\dagger). \qquad (2)$$

Este operador $D(\xi_q)$ es un operador de desplazamiento generalizado en el que ξ_q es un número complejo cuyos parámetros se pueden tomar a conveniencia. Por otro lado, utilizando la identidad de Baker-Campbell-Hausdorf

$$e^{-A} B e^{A} = B + [B, A] + \frac{1}{2!}\left[[B, A], A\right] + \frac{1}{3!}\left[\left[[B, A]A\right]A\right] + \cdots,$$

y eligiendo adecuadamente a los parámetros complejos de ξ_q, el operador $D(\xi_q)$ permite calcular las transformaciones de los generadores $\{N_i, A_q. A_q^+\}$ del álgebra de Lie. Estos generadores se transforman como una combinación lineal de ellos mismos, por ejemplo, un generador A_j del álgebra de Lie se transforma bajo su respectivo operador de desplazamiento como

$$D^\dagger(\xi_q) A_j D(\xi_q) = \sum_i \lambda_{ij}(\xi_q) A_i\,, \qquad (3)$$

en donde se requiere que cada coeficiente λ_{ij} sea una función analítica de los parámetros complejos ξ_q. De este modo, se tiene que un Hamiltoniano con una estructura algebraica como en (1) se puede transformar bajo un operador $D(\xi_q)$ como

$$D^\dagger(\xi_q) H D(\xi_q) = \sum_i \Lambda_i(\xi, a, b, c) N_i + \sum_q \left(F_q(\xi, a, b, c) A_q + M_q(\xi, a, b, c) A_q^\dagger\right). \qquad (4)$$

Dado que los operadores N_i conmutan con el resto de los operadores, el Hamiltoniano (1) se puede diagonalizar siempre y cuando los coeficientes

$$F_q(\xi, a, b, c) = 0, \qquad M_q(\xi, a, b, c) = 0 \qquad (5)$$

Las expresiones anteriores forman un conjunto de ecuaciones de los parámetros ξ_i y de las constantes físicas a_i, b_q y c_q del Hamiltoniano. La solución a estos sistemas de ecuaciones reduce la expresión (4) a

$$D^\dagger(\xi_q) H D(\xi_q) = \sum_i \Lambda_i(\xi, a, b, c) N_i \qquad (6)$$

Ahora bien, si se conocen las funciones propias Φ_n del operador N_i, esto es, funciones tal que $N_i \Phi_n = \alpha_i \Phi_n$ tenemos de la ecuación (6) que

$$H D(\xi_q) \Phi_n = \sum_i \Lambda_i(\xi, a, b, c) \alpha_i\, D(\xi_q) \Phi_n, \qquad (7)$$

y por lo tanto

$$H \Phi_n'^{(q)} = \Omega(\xi, a, b, c, \alpha_i) \Phi_n'^{(q)}, \qquad (8)$$

en donde $\Phi_n'^{(q)} = D(\xi_q)\Phi_n$ y $\Omega(\xi, a, b, c, \alpha_i) = \sum_i \Lambda_i(\xi, a, b, c)\alpha_i$ son respectivamente, las eigenfunciones y eigenvalores del Hamiltoniano (1). Es importante señalar que la diagonalización del Hamiltoniano depende únicamente de si el sistema de ecuaciones (5) tiene solución o no.

III. Diagonalización de un Hamiltoniano con Álgebra de Lie $su(1,1)$ o $su(2)$

En esta sección se introducen dos Hamiltonianos los cuales se escriben como una combinación lineal de los generadores $\{K_\pm, K_0\}$ del grupo $SU(1,1)$ y los generadores $\{J_\pm, J_0\}$ del grupo $SU(2)$ dados por las expresiones

$$\begin{aligned} H_{su(1,1)} &= a_0 K_0 + a_1 K_+ + a_2 K_- \\ H_{su(2)} &= b_0 J_0 + b_1 J_+ + b_2 J_- \end{aligned} \qquad (9)$$

Los generadores de cada grupo satisfacen las relaciones de conmutación [18]

$$[K_0, K_\pm] = \pm K_\pm, \qquad [K_-, K_+] = 2K_0, \qquad (10)$$

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \qquad [J_+, J_-] = 2J_0 \qquad (11)$$

Los respectivos operadores de desplazamiento $D(\xi_1)$ y $D(\xi_2)$ se definen en términos de los operadores de creación y aniquilación $K_\pm$ y $J_\pm$ dados por las expresiones siguientes como;

$$\begin{aligned} D(\xi_1)_{su(1,1)} &= \exp(\xi_1 K_+ - \xi_1^* K_-), \\ D(\xi_2)_{su(2)} &= \exp(\xi_2 J_+ - \xi_2^* J_-), \end{aligned} \qquad (12)$$

en donde $\xi_i = -\frac{1}{2}\tau_i e^{-i\varphi_i}$, $-\infty < \tau_i < \infty$ y $0 \leq \varphi_i \leq 2\pi$. Con estos operadores podemos transformar a los generadores del álgebra de Lie como $K_s' = D^\dagger(\xi_1) K_s D(\xi_1)$ y $J_s' =$

$D^{\dagger}(\xi_2)J_s D(\xi_2)$. Explícitamente obtenemos que los generadores del grupo $SU(1,1)$ se transforman de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
K'_{+} &= \frac{\xi_1^*}{|\xi_1|}\alpha K_0 + (\beta+1)K_{+} + \beta\frac{\xi_1^*}{\xi_1}K_{-},\\
K'_{-} &= \frac{\xi_1}{|\xi_1|}\alpha K_0 + (\beta+1)K_{-} + \beta\frac{\xi_1}{\xi_1^*}K_{+},\\
K'_0 &= (2\beta+1)K_0 + \frac{\alpha\xi_1}{2|\xi_1|}K_{+} + \frac{\alpha\xi_1^*}{2|\xi_1|}K_{-},
\end{aligned} \tag{13}
$$

Mientras que los generadores el grupo $SU(2)$ se trasforman como

$$
\begin{aligned}
J'_0 &= (2\epsilon+1)J_0 + \frac{\delta\xi_2}{2|\xi_2|}J_{+} + \frac{\delta\xi_2^*}{2|\xi_2|}J_{-}.\\
J'_{-} &= -\frac{\xi_2}{|\xi_2|}\delta J_0 + (\epsilon+1)J_{-} + \epsilon\frac{\xi_2}{\xi_2^*}J_{+},\\
J'_{+} &= -\frac{\xi_2^*}{|\xi_2|}\delta J_0 + (\epsilon+1)J_{+} + \epsilon\frac{\xi_2^*}{\xi_2}J_{-},
\end{aligned} \tag{14}
$$

en donde $\alpha = \sinh(2|\xi_1|)$, $\beta = \frac{1}{2}[\cosh(2|\xi_1|) - 1]$, $\delta = \sin(2|\xi_2|)$ y $\epsilon = \frac{1}{2}[\cos(2|\xi_2|) - 1]$.

Así, los Hamiltonianos dados por (9) se transforman en términos de los operadores de desplazamiento de tal manera que estos conservan su estructura algebraica, de tal modo que

$$
\begin{aligned}
H'_{su(1,1)} &= A_0(\xi_1)K_0 + A_1(\xi_1)K_{+} + A_2(\xi_1)K_{-},\\
H'_{su(2)} &= B_0(\xi_2)J_0 + B_1(\xi_2)J_{+} + B_2(\xi_2)J_{-},
\end{aligned} \tag{15}
$$

donde las nuevas constantes A'_s and B'_s están dadas en términos de las viejas constantes como

$$
\begin{aligned}
A_0 &= (2\beta+1)a_0 + \frac{\xi_1^*}{|\xi_1|}\alpha a_1 + \frac{\xi_1}{|\xi_1|}\alpha a_2,\\
A_1 &= \frac{\xi_1}{2|\xi_1|}\alpha a_0 + (\beta+1)a_1 + \frac{\xi_1}{\xi_1^*}\beta a_2,\\
A_2 &= \frac{\xi_1^*}{2|\xi_1|}\alpha a_0 + \frac{\xi_1^*}{\xi_1}\beta a_1 + (\beta+1)a_2
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
B_0 &= (2\epsilon+1)b_0 - \frac{\xi_2^*}{|\xi_2|}\delta b_1 - \frac{\xi_2}{|\xi_2|}\delta b_2,\\
B_1 &= \frac{\xi}{2|\xi_2|}\delta b_0 + (\epsilon+1)b_1 + \frac{\xi_2}{\xi_2^*}\epsilon b_2,\\
B_2 &= \frac{\xi_2^*}{2|\xi_2|}\delta b_0 + \frac{\xi_2^*}{\xi_2}\epsilon b_1 + (\epsilon+1)b_2.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Por otro lado, los generadores $K_{\pm}$ y $J_{\pm}$ pueden eliminarse de los Hamiltonianos $H'_{su(1,1)}$ y $H_{su(2)}$ si los coeficientes $A_1 = A_2 = 0$ y $B_1 = B_2 = 0$. A partir de esto, necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
&\frac{\xi_1}{2|\xi_1|}\alpha a_0 + (\beta+1)a_1 + \frac{\xi_1}{\xi_1^*}\beta a_2 = 0,\\
&\frac{\xi_1^*}{2|\xi_1|}\alpha a_0 + \frac{\xi_1^*}{\xi_1}\beta a_1 + (\beta+1)a_2 = 0.
\end{aligned} \tag{18}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&\frac{\xi}{2|\xi_2|}\delta b_0 + (\epsilon+1)b_1 + \frac{\xi_2}{\xi_2^*}\epsilon b_2 = 0,\\
&\frac{\xi_2^*}{2|\xi_2|}\delta b_0 + \frac{\xi_2^*}{\xi_2}\epsilon b_1 + (\epsilon+1)b_2 = 0.
\end{aligned} \tag{19}
$$

De esta manera, eligiendo a los parámetros coherentes τ_i y φ_i de los números complejos $\xi_i = -\frac{\tau_i}{2}e^{-i\varphi_i}$ como

$$
\tau_1 = \tanh^{-1}\left[\frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_0}\right], \qquad \varphi_1 = \frac{i}{2}\ln\left[\frac{a_1}{a_2}\right] \tag{20}
$$

y

$$
\tau_2 = \arctan\left(\frac{2\sqrt{b_1 b_2}}{b_0}\right), \qquad \varphi_2 = \frac{i}{2}\ln\left[\frac{b_1}{b_2}\right] \tag{21}
$$

se encuentra que los Hamiltonianos dados por (15) son diagonalizados de tal manera que estos se pueden reescribir, bajo la anterior elección de los parámetros, como;

$$
H'_{su(1,1)} = \sqrt{a_0^2 - 4a_1a_2}\,K_0,\ H'_{su(2)} = \sqrt{a_0^2 + 4a_1a_2}\,J_0. \tag{22}
$$

Finalmente, si se conocen las eigenfunciones $\Phi_n^{(1)}$ y $\Phi_n^{(2)}$ de K_0 y J_0 se encuentran los eigenvalores de los Hamiltonianos de la forma (9). Las eigenfunciones se obtienen aplicando los operadores $D(\xi_i)$ sobre las funciones $\Phi_n^{(i)}$. De esto, las eigenfunciones del Hamiltoniano $H_{su(1,1)}$ estan dadas por los estados coherentes de número de Perelomov del grupo $SU(1,1)$. De manera similar, las eigenfunciones del Hamiltoniano $H_{su(2)}$ estan dadas por los estados coherentes del número de Perelomov del grupo $SU(2)$ [19].

Por lo tanto, es conveniente que K_0 y J_0 sean operadores tales que conozcamos sus eigenfunciones y eigenvalores. además, observe que si los coeficientes a_0, a_1 y a_2 son iguales, el problema no tiene una solución exacta.

IV. El modelo de Tavis- Cummings

Si consideramos el modelo de Tucker y Walls [20,21] con solo tres modos interactuando entre sí, utilizando la aproximación de onda rotante el Hamiltoniano de este modelo se puede escribir en la siguiente forma [22,23,24]

$$
H = \omega_1 a^{\dagger}a + \omega_2 b^{\dagger}b + \omega_3 c^{\dagger}c + g\left(a^{\dagger}bc + ab^{\dagger}c^{\dagger}\right), \tag{23}
$$

donde establecemos que $\hbar = 1$, ω_j con $J = 1,2,3$ son las frecuencias de campo, y g es la constante de acoplamiento.

El conjunto de operadores $a, a^\dagger, b, b^\dagger$ y $c, c^\dagger$ satisface el álgebra bosónica

$$[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = [c, c^\dagger] = 1.$$

El Hamiltoniano dado por (23) se puede usar para estudiar el problema de la emisión coherente de un sistema de N átomos de dos niveles que interactúan con un solo modo de campo de radiación, conocido como el modelo de Tavis-Cummings o Dicke.

i. Un enfoque del modelo de Tavis-Cummings a través del grupo SU(1, 1)

Con el fin de utilizar la teoría de grupos desarrollada en secciones anterior para el grupo $SU(1,1)$, podemos reescribir el Hamiltoniano general del modelo de Tavis-Cummings (23) como

$$H = \omega_1 a^\dagger a + (\omega_2 + \omega_3) K_0 + g(a^\dagger K_- + a K_+) + \frac{(\omega_2 - \omega_3)}{2} N_d - \frac{(\omega_2 + \omega_3)}{2}, \tag{24}$$

en donde se ha utilizado la realización de Jordan-Schwinger para el álgebra su$(1,1)$ en términos de los operadores b y c dada por

$$K_0 = \frac{1}{2}(b^\dagger b + c^\dagger c + 1), \qquad K_+ = b^\dagger c^\dagger, \qquad K_- = bc, \qquad N_d = c^\dagger c - b^\dagger b. \tag{25}$$

Utilizando los resultados de la sección III para el grupo $SU(1,1)$, y dado que el operador de desplazamiento de este grupo $D(\xi) = \exp(\xi_1 K_+ - \xi_1^* K_-)$ para la realización (25) conmuta con los operadores N_d y $a^\dagger a$, para una elección de los parámetros complejos de $\xi_1 = -\frac{\tau_1}{2} e^{-i\varphi_1}$ dada por [25]

$$\tau_1 = \tanh^{-1}\left(\frac{2g\sqrt{a^\dagger a}}{\omega_2 + \omega_3}\right), \qquad \varphi_1 = i\ln\left[\frac{2(2\beta + 1)ga}{\alpha(\omega_2 + \omega_3)}\right]. \tag{26}$$

El Hamiltoniano (25) se transforma en el Hamiltoniano $H' = D^\dagger(\xi_1) H D(\xi_1)$ diagonalizado dado por la siguiente expresión

$$H' = \sqrt{(\omega_2 + \omega_3)^2 - 4g^2 a^\dagger a}\, K_0 + \omega_1 a^\dagger a + \frac{(\omega_2 - \omega_3)}{2} N_d - \frac{(\omega_2 + \omega_3)}{2}, \tag{27}$$

cuyas eigenfunciones están dadas por $\Psi' = D^\dagger(\xi_1)\Psi$, donde Ψ son las eigenfunciones del Hamiltoniano origina.

Por otra parte, dado que el operador K_0 es el Hamiltoniano del oscilador armónico bidimensional y este conmuta con los operadores N_d y $a^\dagger a$, la eigenfunciones de H' vienen dadas por el producto directo de las funciones de onda de los operadores K_0 y $a^\dagger a$

$$\Psi' = \psi_{n_a}(x) \otimes \psi_{n_l, m_n}(\rho, \phi)$$

donde

$$\psi_{n_a}(x) = \langle x | n_a \rangle = \sqrt{\frac{1}{\pi^{1/4}(2^n n!)^{1/2}}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x),$$

y

$$\psi_{n_l, m_n}(\rho, \phi) = \langle \rho, \phi | \mathrm{n_l}, \mathrm{m_n} \rangle$$

$$\langle \rho, \phi | n_l, m_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i m_n \phi} (-1)^{n_l} \sqrt{\frac{2(n_l)!}{(n_l + m_n)!}}\, \rho^{m_n} L_{n_l}^{m_n}(\rho^2) e^{-1/2\rho^2}$$

De la acción de los operadores $c,\ c^\dagger$ y $b, b^\dagger$ sobre la base de estados $|n, m_n\rangle$ tenemos que

$$K_0 |n, m_n\rangle = \left(n_l + \frac{m_n}{2} + \frac{1}{2}\right) |n, m_n\rangle,$$

$$N_d |n, m_n\rangle = -m_n |n, m_n\rangle$$

En esta representación del grupo $SU(1,1)$, los números de grupo n, k se relacionan con los números físicos n_l, m_n de la siguiente manera $n = n_l$ y $k = 1/2\ (m_n + 1)$ [26]. De este modo, a partir de estos resultados, obtenemos que el espectro de energía del caso más general del modelo de Tavis-Cummings es

$$E_{su(1,1)} = \sqrt{(\omega_2 + \omega_3)^2 - 4g^2 n_a}\left(n_l + \frac{m_n}{2} + \frac{1}{2}\right) + \omega_1 n_a + \frac{(\omega_3 - \omega_2)}{2} m_n - \frac{(\omega_2 + \omega_3)}{2}. \tag{28}$$

Las eigenfunciones Ψ para el Hamiltoniano del modelo de Tavis-Cummings se obtienen de la ecuación $\Psi = D(\xi_1)\Psi'$ que en este caso corresponden a los estados coherentes de numero de Perelomov para el oscilador armónico bidimensional $\psi_{\zeta, n_l, k}$ dados por

$$\frac{(-1)^{n_l}}{\sqrt{\pi}} e^{i(l - 1/2)\phi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\zeta^s}{s!} \sum_{j=0}^{n_l} \frac{(-\zeta^*)^j}{j!} e^{\eta(k + n_l - j)} \frac{\sqrt{2\Gamma(n_l + 1)\Gamma\left(n_l + l + \frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(n_l - j + l + \frac{1}{2}\right)} \times \frac{\Gamma(n_l - j + s + 1)}{\Gamma(n_l - j + 1)} e^{-\rho^2/2} \rho^{l - 1/2} L_{n_l - j + s}^{l - 1/2}(\rho^2),$$

donde $l = m_n + \frac{1}{2}$. La expresión anterior puede reescribirse en la forma ψ_{ζ, n_l, m_n} expresadas como

$$\sqrt{\frac{2\Gamma(n_l+1)}{\Gamma(n_l+m_n+1)}}\frac{(-1)^{n_l}}{\sqrt{\pi}}e^{im_n\phi}\frac{(-\zeta^*)^{n_l}(1-|\zeta|^2)^{\frac{m_n}{2}+\frac{1}{2}}(1+\sigma)^{n_l}}{(1-\zeta)^{m_n+1}}$$
$$\times e^{-\frac{\rho^2(\zeta+1)}{2(1-\zeta)}}\rho^{m_n}L_{n_l}^{m_m}\left(\frac{\rho^2\sigma}{(1-\zeta)(1-\sigma)}\right)$$

donde hemos usado $m_n = l - \frac{1}{2}$ y σ definido a como

$$\sigma = \frac{1-|\zeta|^2}{(1-\zeta)(-\zeta^*)}.$$

De esta manera, las eigenfunciones del modelo de Tavis-Cummings están dadas por el producto tensorial de las eigenfunciones del oscilador armónico unidimensional $\psi_a(x)$ y los estados coherentes de numero de Perelomov del grupo $SU(1{,}1)$ para el oscilador armónico bidimensional $\psi_{\zeta,n_l,k}$ como sigue

$$\Psi = \psi_{n_a}(x) \otimes \psi_{\zeta,n_l,m_n}$$

Por lo tanto, el modelo de Tavis-Cummings se resolvió mediante el uso del operador de desplazamiento y los estados coherentes del número de Perelomov del grupo $SU(1,1)$,

De manera análoga utilizando los resultados de la sección III, este mismo modelo se puede resolver utilizando el operador de desplazamiento y los estados de numero de Perelomov del grupo $SU(2)$ ya que el Hamiltoniano se puede escribir en la forma.

$$H = \omega_3\, c^\dagger c + (\omega_2 - \omega_1)\, J_0 + g(\, c\, J_+ + \ c^\dagger J_-) + \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}\, N_s,$$

con los generadores del grupo $SU(2)$ están dados por la realización de Jordan-Schwinger del álgebra $su(2)$

$$J_0 = \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b), \quad J_+ = a^\dagger b, \quad J_- = b^\dagger a.$$

IV. Conclusiones

Cuando un Hamiltoniano H se puede escribir de manera lineal en términos de los generadores del álgebra de Lie de un grupo, es posible diagonalizar a este Hamiltoniano mediante el operador de desplazamiento $D(\xi)$ transformando al Hamiltoniano del sistema H en un Hamiltoniano H' dado por $H' = D(\xi)HD^\dagger(\xi)$, el cual es diagonal a partir de una adecuada elección de los parámetros del número complejo ξ que eliminé a los términos acoplados del sistema (K_+, K_- y J_+, J_- en el caso de los generadores de los grupo SU(1,1) y SU(2)). El operador de desplazamiento $D(\xi)$ juega el papel de una especie de rotación que al aplicarse sobre sobre el Hamiltoniano elimina los términos acoplados dejando únicamente los términos diagonalizados del sistema. Como una aplicación de la teoría desarrollada se resolvió el modelo de Tavis-Cummings, modelo que Tavis y Cummings estudiaron y resolvieron exactamente el problema de N moléculas idénticas de dos niveles que interactúan a través de un acoplamiento dipolar con un monomodo cuantificado. campo de radiación en resonancia [27].

Referencias

[1] A. M. Perelomov, Generalized Coherent States and Their Applications, Springer, Berlin, 1986.
[2] J. R. Klauder, Ann. Phys. (N.Y.) 11, 123 (1960); J. Math. Phys. 4, 1055 (1963).
[3] R. J. Glauber, Phys. Rev. 130 (1963) 2529.
[4] A. Arima and F. Iachelllo, Ann. Phys. (N.Y.) 99 (1976), 253;111 (1978), 201;123 (1979), 468.
[5] F. Iachello, Chem Phys. Lett. 78 (1981), 581; F. Iachello and R.D. Levine. J. Chem Phys. 77 (1982), 3046.
[6] M.A. Bashir, and M.S. Abdalla, Phys. Lett. A 204, 21 (1995).
[7] N.M. Bogoliubov, R.K. Bullough, and J. Timonen, J. Phys. A: Math. Gen. 29, 6305 (1996).
[8] A. Rybin, G. Kastelewiczz, J. Timoneny, and N.M. Bogoliubov, J. Phys. A: Math. Gen. 31, 4705 (1998).
[9] I.P. Vadeiko, G.P. Miroshnichenko, A.V. Rybin, and J. Timonen, Phys. Rev. A 67, 053808 (2003).
[10] P.W. Milonni, J.R. Ackerhalt, and H.W. Galbraith, Phys. Rev. Lett. 50, 966 (1983).
[11] S. Agarwal, S.M.H. Rafsanjani, and J.H. Eberly, Phys. Rev. A 85, 043815 (2012).
[12] L. Lamata, J. Le´on, T. Sch¨atz, E. Solano, Phys. Rev. Lett. 98, 253005 (2007).
[13] L. Lamata et al., New J. Phys. 13, 095003 (2011).
[14] C. Sun, and N. Sinitsyn, Phys. Rev. A, 033808 (2016).
[15] G. Romero et al., Phys. Rev. Lett. 108, 120501 (2012).
[16] I.M. Mirza, J.C. Schotland, Phys. Rev. A 94, 012309 (2016).
[17] J.M. Fink et al., Phys. Rev. Lett. 103, 083601 (2009).
[18] A. Vourdas, Phys Rev. A 41, 1653 (1990).
[19] A. M. Perelomov, Generalized Coherent States and Their Applications, Springer, Berlin, 1986.
[20] J. Tucker, and D.F. Walls, Phys. Rev. 178, 2036 (1969).
[21] J. Tucker, and D.F. Walls, Ann. Phys. NY 52, 1 (1969).
[22] E.A. Mishkin, and D.F. Walls, Phys. Rev. 185, 1618 (1969).
[23] G.P. Agrawal, and C.L. Mehta, J. Phys. A: Math. Gen. 7, 607 (1974).
[24] M.S. Abdalla, E.M. Khalil, A.S.-F. Obada, J. Peˇrina, and J. Kˇrepelka, AIP Advances 7, 015013 (2017).
[25] D. Ojeda-Guill´en, R.D. Mota, V.D. Granados, J. Math. Phys. 55, 042109 (2014).
[26] D. Ojeda-Guill´en, R.D. Mota, V.D. Granados, J. Math. Phys. 57, 062104 (2016).
[27] M. Tavis, and F.W. Cummings, Phys. Rev. 170, 379 (1968).