Ruptura suave de la simetría $\mu \leftrightarrow \tau$ por $S_4 \otimes Z_2$

Asahel Enrique Pozas Ramírez[1a], Marlon Michael Suárez Castañeda[1b], J.D. García-Aguilar[2], Juan Carlos Gómez-Izquierdo[2]

[1]Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Edificio 9, Ciudad de México 07738, México.

[2]Centro de estudios Científicos y Tecnológicos No.16 "Hidalgo". Distrito de Educación, Salud, Tecnología e Innovación. Carretera Pachuca-Actopan km 1+500, C.P. 42162, San Agustín Tlaxiaca, Hidalgo.

E-mail: [a] apozasr1700@alumno.ipn.mx, [b] msuarezc1700@alumno.ipn.mx

Resumen- **La simetría μ↔τ ha sido descartada por su predicción en los ángulos atmosférico y de reactor en las oscilaciones de neutrinos. Sin embargo, una ruptura suave sobre esta simetría conduce a valores dentro de las cotas experimentales. Es por ello que proponemos un modelo leptónico no renormalizable donde los ángulos de mezcla surgen de la ruptura espontánea del grupo discreto $S_4 \otimes Z_2$. Además, se tiene como predicción una interesante dependencia del ángulo atmosférico y del ángulo de reactor en términos de un parámetro perturbativo.**

Palabras clave- **simetría, ruptura, ángulo**

Abstract- **The μ↔τ symmetry has been ruled out by its prediction on the reactor and atmospheric angles during neutrino oscillations. Nevertheless, a soft breaking on this symmetry leads to values within the experimental limits. On behalf of this, we propose a non-renormalizable leptonic model where the mixing angles arise from the spontaneous breaking of the discrete group $S_4 \otimes Z_2$. Moreover, we have an interesting dependence of the atmospheric and reactor angles in terms of a perturbative parameter as a prediction.**

Keywords- **symmetry, breaking, angle**

I. INTRODUCCIÓN

El descubrimiento del fenómeno de oscilación de neutrinos implica que estas partículas tienen una masa distinta de cero, lo cual está en contradicción con el Modelo Estándar de las partículas fundamentales (SM por sus siglas en inglés) ya que en la construcción del SM se considera a los neutrinos sin masa. Aun cuando existen distintos mecanismos [1] para obtener masas ligeras en el sector de neutrinos, estos modelos no logran explicar el origen de estas masas ni por qué el patrón de masas es diferente al sector de quarks.

Distintos experimentos han logrado medir con gran precisión los ángulos de mezcla [2-3]. Por otra parte, se ha observado que la matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) tiene valores grandes en sus entradas y que la segunda y tercera fila satisfacen la relación

$$\left|U_{\mu i}\right| = \left|U_{\tau i}\right|, \tag{1}$$

donde i=1, 2, 3.

La expresión (1) significa que puede existir una simetría en la matriz de masa efectiva de los neutrinos, entonces el concepto de simetría de sabor puede ser utilizado para explicar el patrón de neutrinos y es por lo que un número considerable de simetrías discretas [4-7] han sido utilizadas en el sector de leptones. En particular, los datos de neutrinos parecen obedecer con gran aproximación a la simetría $\mu \leftrightarrow \tau$ en la matriz de masa efectiva de los neutrinos [8] cuando la matriz de masa de los leptones cargados es diagonal. Esta simetría $\mu \leftrightarrow \tau$ implica tener valores de 0° y 45° para los ángulos de reactor y atmosférico respectivamente. Aun cuando la simetría $\mu \leftrightarrow \tau$ es inexacta, se han propuesto modelos con una ruptura suave de la misma para explicar leptogénesis, materia oscura, etc. [9-12].

En este trabajo proponemos un modelo leptónico no renormalizable donde los ángulos de mezcla surgen de la ruptura espontánea del grupo de simetría discreta $S_4 \otimes Z_2$ con la finalidad de que la simetría $\mu \leftrightarrow \tau$ no esté presente en la matriz de masa efectiva de los neutrinos, la cual surge del mecanismo see-saw tipo II obteniendo como principal resultado que los ángulos de reactor y atmosférico pueden ser consistentes con los datos experimentales.

La organización de este artículo es la siguiente: en la sección II presentamos de manera detallada la estructura del modelo, en la sección III se incluye el análisis para obtener la matriz de masa de neutrinos efectiva, así como los ángulos de mezcla. Finalmente, en la sección IV presentamos nuestras conclusiones.

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyectos 20221285, 20220411 y PAPIIT IN109321.

II. MODELO

Bajo los grupos de norma del SM $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ los campos de materia del modelo son $L^T = (\nu_L e_L) \sim (1,2,-1)$ y $e_R \sim (1,1,-2)$. Los leptones cargados obtienen su masa a través del mecanismo de Higgs considerando un doblete de Higgs (H) mientras que el mecanismo see-saw dota de masa a los neutrinos considerado un triplete escalar (Δ)

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} \sim (1,2,1), \Delta = \begin{pmatrix} \frac{\Delta^+}{\sqrt{2}} & \Delta^{++} \\ \Delta^0 & -\frac{\Delta^+}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \sim (1,3,2) \qquad (2)$$

Por otra parte, para obtener la mezcla entre neutrinos vamos a introducir los flavones $(\phi, \varphi\ y\ \xi)$ los cuales son singletes bajo los grupos de norma del SM.

Al ser el único propósito de este trabajo mostrar la generación de las mezclas de neutrinos, nos vamos a enfocar en el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Y^\nu \bar{L}(i\sigma_2)\Delta(L)^c - V(H,\Delta,\phi,\varphi,\xi) + h.c. \qquad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} V(H,\Delta,\phi,\varphi,\xi) = {} & m_H^2 H^\dagger H + \frac{1}{2}\lambda_H (H^\dagger H)^2 \\ & + m_\Delta^2 Tr(\Delta^\dagger\Delta) \\ & + \frac{1}{2}\lambda_\Delta \left(Tr(\Delta^\dagger\Delta)\right)^2 \\ & + \lambda_{H\Delta}(H^\dagger H)Tr(\Delta^\dagger\Delta) \\ & + \lambda'_{H\Delta} H^T\Delta^\dagger H + m_\phi^2|\phi|^2 \\ & + \frac{1}{2}\lambda_\phi|\phi|^4 \\ & + \lambda_{H\phi}Tr(\Delta^\dagger\Delta)|\phi|^2 \\ & + \lambda_{\Delta\phi}Tr(\Delta^\dagger\Delta)|\phi|^2 \\ & + m_\varphi^2|\varphi|^2 + \frac{1}{2}\lambda_\varphi|\varphi|^4 \\ & + \lambda_{H\varphi}(H^\dagger H)|\varphi|^2 \\ & + \lambda_{\Delta\varphi}Tr(\Delta^\dagger\Delta)|\varphi|^2 + m_\xi^2|\xi|^2 \\ & + \frac{1}{2}\lambda_\xi|\xi|^4 + \lambda_{H\xi}(H^\dagger H)|\xi|^2 \\ & + \lambda_{\Delta\xi}Tr(\Delta^\dagger\Delta)|\xi|^2 \\ & + \lambda_{\varphi\phi}|\varphi|^2|\phi|^2 + \lambda_{\xi\phi}|\xi|^2|\phi|^2 \\ & + \lambda_{\xi\varphi}|\xi|^2|\varphi|^2. \end{aligned} \qquad (4)$$

En este trabajo no haremos el estudio extenso del potencial escalar, sin embargo, se va a considerar que los valores de expectación del vacío (vev's) para los dobletes de Higgs están alineados bajo la simetría $\boldsymbol{S}_3$ el cual es un subgrupo de $\boldsymbol{S}_4$.

TABLA I. Asignación bajo el grupo de sabor $\boldsymbol{S}_4$.

Materia	L	e_R	H	H_3	Δ	ϕ	φ	ξ
$\boldsymbol{S}_4$	3_1	3_1	2	1_1	1_1	1_1	2	3_1
$\boldsymbol{Z}_2$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1

La tabla I muestra la asignación de los campos bajo los grupos $\boldsymbol{S}_4 \otimes \boldsymbol{Z}_2$. Con esta asignación se escribe el siguiente lagrangiano de sabor y norma invariante

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = {} & y_1^e[\overline{L_1}H_3e_{1R} + \overline{L_2}H_3e_{2R} + \overline{L_3}H_3e_{3R}] \\ & + y_2^e\Big[\overline{L_1}H_2e_{1R} \\ & - \frac{1}{2}\overline{L_2}\big(\sqrt{3}H_1 + H_2\big)e_{2R} \\ & + \frac{1}{2}\overline{L_3}\big(\sqrt{3}H_1 + H_2\big)e_{3R}\Big] \\ & + y_1^N[\overline{L_1}(i\sigma_2)\Delta\phi L_1^C \\ & + \overline{L_2}(i\sigma_2)\Delta\phi L_2^C \\ & + \overline{L_3}(i\sigma_2)\Delta\phi L_3^C]\frac{1}{\Lambda} \\ & + y_2^N\Big[\overline{L_1}(i\sigma_2)\Delta\varphi_2 L_1^C \\ & - \frac{1}{2}\overline{L_2}(i\sigma_2)\Delta\big(\sqrt{3}\varphi_1 + \varphi_2\big)L_2^C \\ & + \frac{1}{2}\overline{L_3}(i\sigma_2)\Delta\big(\sqrt{3}\varphi_1 \\ & - \varphi_2\big)L_3^C\Big]\frac{1}{\Lambda} \\ & + y_3^N[\overline{L_1}(i\sigma_2)\Delta(\xi_2L_3^C + \xi_3L_2^C) \\ & + \overline{L_2}(i\sigma_2)\Delta(\xi_1L_3^C + \xi_3L_1^C) \\ & + \overline{L_3}(i\sigma_2)\Delta(\xi_1L_2^C + \xi_2L_1^C)]\frac{1}{\Lambda}. \end{aligned} \qquad (5)$$

donde Λ es una escala de corte para este modelo efectivo.

A partir de la ecuación (5) y posterior a la ruptura espontánea de la simetría del mecanismo de Higgs, se obtiene la masa de los leptones en la forma que se muestra en (6).

$$M_e = \begin{pmatrix} y_1^e \langle H_3\rangle + y_2^e \langle H_2\rangle & 0 & 0 \\ 0 & y_1^e\langle H_3\rangle - \frac{1}{2} y_2^e\left(\sqrt{3}\langle H_1\rangle + \langle H_2\rangle\right) & 0 \\ 0 & 0 & y_1^e\langle H_3\rangle + \frac{1}{2} y_2^e\left(\sqrt{3}\langle H_1\rangle - \langle H_2\rangle\right) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$M_\nu = \begin{pmatrix} y_1^e \langle \phi\rangle + y_2^N \langle \varphi_2\rangle & y_3^N\langle \xi_3\rangle & y_3^N\langle \xi_2\rangle \\ y_3^N\langle \xi_3\rangle & y_1^N\langle \phi\rangle - \frac{1}{2} y_2^N\left(\sqrt{3}\langle \varphi_1\rangle + \langle \varphi_2\rangle\right) & y_3^N\langle \xi_1\rangle \\ y_3^N\langle \xi_2\rangle & y_3^N\langle \xi_1\rangle & y_1^e\langle \phi\rangle + \frac{1}{2} y_2^e\left(\sqrt{3}\langle \varphi_1\rangle - \langle \varphi_2\rangle\right) \end{pmatrix} \frac{\langle \Delta\rangle}{\Lambda}$$

III. MASAS Y MEZCLA DE LOS NEUTRINOS

Para la obtención de la masa de los neutrinos se asumen las siguientes configuraciones de los vev's

$$\begin{gathered} \langle \xi\rangle = \left(\upsilon_{\xi_1}, \upsilon_\xi, \upsilon_\xi\right), \\ \langle \phi\rangle = \upsilon_\phi(1,1,1), \\ \langle \varphi\rangle = \upsilon_\varphi(1,0). \end{gathered} \quad (7)$$

Por otra parte, es posible diagonalizar a la matriz $\boldsymbol{M}_\nu$ a través de la matriz unitaria $\boldsymbol{U}_\nu$ considerando la expresión

$$\widehat{M_\nu} = Diag(m_1, m_2, m_3) = U_\nu^\dagger M_\nu U_\nu^* \quad (8)$$

donde $\boldsymbol{U}_\nu = \boldsymbol{S}_{23}\boldsymbol{u}_\nu$ con

$$S_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Es importante remarcar que la matriz de transformación u_ν cumple la condición $\widehat{\boldsymbol{M}_\nu} = \boldsymbol{u}_\nu^\dagger \boldsymbol{m}_\nu \boldsymbol{u}_\nu^*$ si se considera la siguiente matriz de masa efectiva

$$\boldsymbol{m}_\nu = \begin{pmatrix} y_1^N\upsilon_\phi & y_3^N\upsilon_\xi & y_3^N\upsilon_\xi \\ y_3^N\upsilon_\xi & y_1^N\upsilon_\phi + \frac{\sqrt{3}}{2} y_2^N\upsilon_\varphi & y_3^N\upsilon_{\xi_1} \\ y_3^N\upsilon_\xi & y_3^N\upsilon_{\xi_1} & y_1^N\upsilon_\phi - \frac{\sqrt{3}}{2} y_2^N\upsilon_\varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\langle \Delta\rangle}{\Lambda} = \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\mu} \\ m_{e\mu} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{e\mu} & m_{\mu\tau} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Esta matriz de masa efectiva (10) muestra de manera explícita que la simetría $\mu \leftrightarrow \tau$ está rota ya que $m_{\mu\mu} \neq m_{\tau\tau}$ y por lo tanto los ángulos de mezcla para neutrinos de reactor y atmosférico tienen valores distintos de 0° y 45° respectivamente. Por otra parte, su diagonalización puede realizarse utilizando un enfoque perturbativo de la forma

$$\boldsymbol{m}_\nu = \overbrace{\begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\mu} \\ m_{e\mu} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{e\mu} & m_{\mu\tau} & m_{\mu\mu} \end{pmatrix}}^{m_\nu^0} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{\mu\mu}\epsilon \end{pmatrix}}^{m_\nu^\epsilon}, \quad (21)$$

donde se considera a

$$\epsilon = \frac{m_{\tau\tau} - m_{\mu\mu}}{m_{\mu\mu}} \quad (32)$$

como el parámetro de perturbación con un valor esperado de 0.3 y, por lo tanto, los términos de orden superior pueden despreciarse.

La matriz m_ν^0 se puede diagonalizar utilizando la matriz

$$\boldsymbol{U}_\nu^0 = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -\frac{sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{cos\theta}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{cos\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (13)$$

con la intención de obtener la expresión

$$U_\nu^{0\dagger} m_\nu^0 U_\nu^{0*} = Diag.(m_1^0, m_2^0, m_3^0). \quad (44)$$

Así mismo, mediante la expresión $\widehat{M_\nu} = u_\nu^\dagger m_\nu u_\nu^*$ es posible definir $u_\nu \approx U_\nu^0 U_\nu^\epsilon$. Esto conduce a la siguiente igualdad

$$\widehat{M_\nu} = U_\nu^\epsilon \left[U_\nu^{0\dagger} m_\nu^0 U_\nu^{0*} + U_\nu^{0\dagger} m_\nu^\epsilon U_\nu^{0*} \right] U_\nu^{\epsilon *}, \tag{55}$$

y consecuentemente

$$\boldsymbol{U}_\nu^{0\dagger} \boldsymbol{m}_\nu^\epsilon \boldsymbol{U}_\nu^{0*} = \frac{\epsilon m_{\mu\mu}^0}{2} \begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\frac{sin2\theta}{2} & -sin\theta \\ -\frac{sin2\theta}{2} & \cos^2\theta & cos\theta \\ -sin\theta & cos\theta & 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$m_{\mu\mu}^0 = \frac{1}{2}\left(m_1^0 \sin^2\theta + m_2^0 \cos^2\theta - m_3^0\right).$$

Además, mediante teoría de perturbaciones se obtiene

$$\boldsymbol{U}_\nu^\epsilon \approx \begin{pmatrix} N_1 & -\frac{m_{\mu\mu}^0}{m_2^0 - m_1^0}\frac{sin2\theta}{4}\epsilon N_2 & \frac{m_{\mu\mu}^0}{m_1^0 - m_3^0}\frac{sin\theta}{2}\epsilon N_3 \\ \frac{m_{\mu\mu}^0}{m_2^0 - m_1^0}\frac{sin2\theta}{4}\epsilon N_1 & N_2 & -\frac{m_{\mu\mu}^0}{m_2^0 - m_3^0}\frac{cos\theta}{2}\epsilon N_3 \\ -\frac{m_{\mu\mu}^0}{m_2^0 - m_3^0}\frac{sin\theta}{2}\epsilon N_1 & \frac{m_{\mu\mu}^0}{m_2^0 - m_3^0}\frac{cos\theta}{2}\epsilon N_2 & N_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

donde los factores de normalización son escritos como

$$sin\theta_{13} = |\boldsymbol{V}_{13}| = \frac{N_3}{4}\left|\frac{m_{\mu\mu}^0 (m_2^0 - m_1^0)\epsilon}{(m_2^0 - m_3^0)(m_1^0 - m_3^0)}\right| sin2\theta;$$

$$sin\theta_{12} = \frac{|\boldsymbol{V}_{12}|}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_{13}}} = N_2 sin\theta \frac{\left|1 - \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{m_{\mu\mu}^0}{m_2^0 - m_1^0}\right)\cos^2\theta\right|}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_{13}}}; \tag{18}$$

$$sin\theta_{12} = \frac{|\boldsymbol{V}_{12}|}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_{13}}} = N_2 sin\theta \frac{\left|1 - \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{m_{\mu\mu}^0}{m_2^0 - m_1^0}\right)\cos^2\theta\right|}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_{13}}};$$

La comparación de nuestra matriz PMNS $V \approx U_\nu^0 U_\nu^\epsilon$ con la parametrización estándar permite escribir las siguientes expresiones teóricas para los ángulos de mezcla

$$sin\theta_{13} = |\boldsymbol{V}_{13}| = \frac{N_3}{8}\left|\frac{[(|m_2^0| + |m_1^0|)\cos^2\theta - (|m_1^0| - |m_3^0|)](|m_2^0| + |m_1^0|)}{(|m_2^0|+|m_3^0|)(|m_1^0|-|m_3^0|)}\right| |\epsilon| sin2\theta;$$

$$sin\theta_{12} = \frac{|\boldsymbol{V}_{12}|}{\sqrt{1-\sin^2\theta_{13}}} = N_2 sin\theta \frac{\left|1 - \frac{\epsilon}{4}\left[\cos^2\theta - \left(\frac{|m_1^0| - |m_3^0|}{|m_2^0| + |m_1^0|}\right)\right]\cos^2\theta\right|}{\sqrt{1-\sin^2\theta_{13}}}; \tag{19}$$

$$sin\theta_{23} = \frac{|\boldsymbol{V}_{23}|}{\sqrt{1-\sin^2\theta_{13}}} = \frac{N_3}{\sqrt{2}} \frac{\left|1 - \frac{\epsilon}{4}\frac{[(|m_2^0| + |m_1^0|)^2\cos^2\theta\sin^2\theta - (|m_2^0| + |m_1^0|)(|m_1^0| - |m_3^0|) + (|m_1^0| - |m_3^0|)^2]}{(|m_2^0| + |m_3^0|)(|m_1^0| - |m_3^0|)}\right|}{\sqrt{1-\sin^2\theta_{13}}}.$$

Vale la pena remarcar que en el límite $\epsilon \to 0$, las expresiones (19) conducen a las conocidas predicciones: $\theta_{13} = 0, \theta_{12} = \theta_\nu \ y \ \theta_{23} = \pi/4$ como era de esperarse debido al enfoque utilizado.

IV. CONCLUSIONES

Presentamos un modelo no renormalizable basado en la simetría discreta $\boldsymbol{S}_4 \otimes \boldsymbol{Z}_2$ que permite explicar la generación de masas y mezclas de los neutrinos a través del mecanismo see-saw tipo II.

Incorporamos un estudio perturbativo dentro de este modelo para obtener una ruptura de la simetría $\mu \leftrightarrow \tau$. Finalmente se demuestra que los ángulos de mezcla atmosférico y de reactor dependen de un parámetro adimensional cuyo valor es 0.3.

REFERENCIAS

[1] J. C. Romao, *Supersymmetric Models for Neutrino Mass*, in *6th International Workshop on New Worlds in Astroparticle Physics* (2007)

[2] P. F. de Salas, D. V. Forero, S. Gariazzo, *et al.* 2020 global reassessment of the neutrino oscillation picture. *J. High Energ. Phys.* **2021,** 71 (2021). https://doi.org/10.1007/JHEP02(2021)071

[3] Esteban, I., Gonzalez-Garcia, M., Maltoni, M. *et al.* The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *J. High Energ. Phys.* **2020,** 178 (2020). https://doi.org/10.1007/JHEP09(2020)178

[4] Hajime Ishimori, Tatsuo Kobayashi, Hiroshi Ohki, Yusuke Shimizu, Hiroshi Okada, Morimitsu Tanimoto, Non-Abelian Discrete Symmetries in Particle Physics, *Progress of Theoretical Physics Supplement*, Volume 183, January 2010, Pages 1–163, https://doi.org/10.1143/PTPS.183.1

[5] Grimus, W., & Ludl, P. O. (2012). *Finite flavour groups of fermions. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 45(23), 233001*. https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/23/233001

[6] Ishimori, H., Kobayashi, T., Ohki, H., Okada, H., Shimizu, Y., & Tanimoto, M. (2012). *An Introduction to Non-Abelian Discrete Symmetries for Particle Physicists. Lecture Notes in Physics.* https://doi.org/10.1007/978-3-642-30805-5

[7] King, S. F., & Luhn, C. (2013). *Neutrino mass and mixing with discrete symmetry. Reports on Progress in Physics, 76(5), 056201*. https://doi.org/10.1088/0034-4885/76/5/056201

[8] Xing, Z.-Z., & Zhao, Z.-H. (2016). *A review of μ-τ flavor symmetry in neutrino physics. Reports on Progress in Physics, 79(7), 076201*. https://doi.org/10.1088/0034-4885/79/7/076201

[9] Feruglio, F., & Romanino, A. (2021). *Lepton flavor symmetries. Reviews of Modern Physics, 93(1).* https://doi.org/10.1103/revmodphys.93.015007

[10] Calibbi, L., López-Ibáñez, M.L., Melis, A. *et al.* Implications of the Muon g-2 result on the flavour structure of the lepton mass matrix. *Eur. Phys. J. C* **81,** 929 (2021). https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09741-1

[11] Julia Gehrlein, Serguey Petcov, Martin Spinrath & Arsenii Titov. (2021). *Testing neutrino favor models.* https://arxiv.org/abs/2203.06219

[12] Garv Chauhan, et al. (2021). *Discrete Flavor Symmetries and Lepton Masses and Mixings.* https://arxiv.org/abs/2203.08105