

# La Resonancia

José Antonio Peralta y Víctor H. Cabellos

Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México

Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55007 Fax (55)5729-55015 E-mail: peraltaesfm@gmail.com

**Resumen** — Se presentan en este trabajo diferentes casos en la vida real en los cuáles es importante el fenómeno de la resonancia. Se incluyen casos mecánicos, así como resonancia en los circuitos LC con el objeto de captar ondas de estaciones comerciales. El objetivo del trabajo es mostrar con ejemplos de la vida cotidiana la teoría de la resonancia que usualmente solo se estudia a nivel teórico en las clases convencionales con el objeto de desarrollar el interés de los alumnos.

**Palabras:** Resonancia, casos de resonancia, resonancia en sismos.

**Abstract**— Different cases of real life in which the phenomenon of resonance is important are presented in this work. Mechanical cases are included as well as resonance in the LC circuits in order to capture waves from commercial stations. The objective of the work is to show with examples of everyday life the theory of resonance that is usually only studied at a theoretical level in conventional classes in order to develop the interest of the students.

**Keywords** —Resonance, different cases of real life, LC circuits,

## I. INTRODUCCIÓN

Este trabajo está dirigido ante todo a los alumnos del curso de electricidad y magnetismo; este curso ha sido impartido de manera que las leyes en el curso de Física III palpén los alumnos en situaciones concretas sus aplicaciones, tanto para la vida cotidiana como en la industria, y dado que el curso de Física II de impartió de forma incompleta dada la situación de la pandemia, antes de introducir el funcionamiento específico del circuito LC para fines de sintonización de ondas de radio se hace un repaso al modo como la resonancia se presenta en diversos casos de la vida real.

## II. TEORÍA

### *La resonancia en un sistema sencillo masa- resorte*

Para ilustrar algunos de los aspectos más relevantes del fenómeno de la resonancia, se desarrolla el análisis de un sistema sencillo como es el de una masa ligada a un resorte, este caso, pese a su sencillez, coloca ante nuestra atención conceptos básicos del fenómeno que se presentan aún en casos más complejos [1].

Cuando a una masa acoplada a un resorte orientado verticalmente se le saca de su posición de equilibrio y luego se le deja en libertad de moverse bajo la acción de la fuerza

propia del resorte aplicando la segunda ley de Newton  $F = ma$ , donde  $F$  es la fuerza,  $m$  la masa y  $a$  la aceleración en la dirección vertical  $y$ , se obtiene [1]

$$y(t) = A \cos \omega_0 t \quad (1)$$

en que la frecuencia angular del movimiento oscilatorio es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (2)$$

Con  $K$  la constante de rigidez del resorte y  $M$  su masa-

(2)

Es de hacer notar que la frecuencia angular no depende de la amplitud sino solo de la constante  $K$  del resorte y de la masa, por tanto, *este sistema tiene una sola frecuencia que “adopta” en forma espontánea en cuanto se le deja oscilar libremente, por ello se le denomina “frecuencia natural del sistema.*

### *Oscilador forzado*

Si se analiza ahora el caso de un oscilador forzado en que se aplica sobre la masa otra fuerza más la cual tiene carácter periódico con frecuencia  $\omega$  y actúa en la dirección del eje del resorte, tal como se observa en la figura 1.



Figura 1. Resorte con oscilación forzada

Si la fuerza externa periódica tiene la forma  $F = F_0 \cos \omega t$ , entonces la fuerza total que actúa sobre la masa  $m$  es

$$F = -Ky + F \cos \omega t \quad (4)$$

y puesto que la aceleración de la masa es

$$a = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (5)$$

la segunda ley de Newton toma la forma

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -Ky + F \cos \omega t \quad (6)$$

La solución propuesta de la anterior ecuación es

$$y = A \cos \omega t \quad (7)$$

Al derivar 2 veces con respecto al tiempo y despejar la amplitud de la oscilación se obtiene que

$$A = \frac{F_0}{m[\omega_0^2 - \omega^2]} \quad (8)$$

Se observa que cuando  $\omega$  tiende a  $\omega_0$  el valor absoluto de la amplitud  $A$  tiende a infinito, **en esta situación se dice que el sistema entra en un estado de Resonancia.**

### CONDICIONES DE LA RESONANCIA

El fenómeno de la resonancia requiere por tanto:

- de un sistema que presente frecuencias naturales de oscilación
- de una fuerza externa de tipo periódico que actúe sobre el sistema oscilatorio
- de una coincidencia entre ambos tipos de frecuencia.

### III. FENÓMENOS DE RESONANCIA EN LA VIDA REAL Y ARTIFICIAL

¿Qué tan factible es que este tipo de condiciones se presenten en la vida real? La respuesta a esta pregunta permite ver el campo tan amplio de aplicación de este concepto, así como su gran capacidad explicativa para el entendimiento de una gran cantidad de fenómenos.

#### *Oscilaciones mecánicas*

Pese que en apariencia el mundo en que vivimos es en gran medida estático, en realidad está en continuo cambio y movimiento, y un tipo especial del movimiento es el debido

a las fuerzas mecánicas oscilantes, basta un pequeño repaso mental para enumerar una gran cantidad de ellas:

- Los diversos sonidos ambientales son vibraciones de tipo mecánico, ya que son las variaciones periódicas de la presión del aire o de las cosas que nos rodean las que generan los sonidos.
- Los edificios en que habitamos o en que trabajamos son estructuras elásticas que permanentemente están vibrando debido al paso cercano de los automotores pesados o a los mismos impulsos mecánicos producidos por quienes los habitan, al caminar, al bailar, al mover muebles.
- El suelo mismo en que nos movemos experimenta movimientos oscilatorios todos los días, tal como nos lo indica el reporte diario del Servicio Sismológico Nacional, simplemente que son de tan pequeña magnitud que en general no los alcanzamos a percibir. Así, en un mes es típico que se presenten cerca de 90 sismos de poco más de 3 grados en la escala Richter, es decir, casi 3 movimientos oscilatorios del suelo por día [2].
- Las vibraciones que parten del motor de los automóviles someten a todas las partes de un auto y a sus ocupantes a continuas oscilaciones mecánicas.
- El mundo laboral está lleno de máquinas de diferentes tamaños que van desde los taladros de mano hasta máquinas más potentes que producen toda una variedad de vibraciones mecánicas.
- Las mismas fuerzas gravitatorias oscilan, tal como lo muestra el fenómeno de las mareas en que el nivel del mar sube y baja acompañado con el movimiento periódico de la Luna.

### IV. DIVERSOS CASOS DE RESONANCIA

Si se está en un mundo sometido continuamente a fuerzas oscilantes, y si además se está rodeado de estructuras elásticas tales como ventanas, puentes, edificios, etc., es factible que en muchos casos la frecuencia de las fuerzas oscilantes coincida con alguna de las frecuencias naturales de las estructuras elásticas provocando fenómenos de resonancia. Se muestran algunos ejemplos:

- 1) Cuando decenas o cientos de soldados marchan dando golpes rítmicos de frecuencia muy constante en el piso, al cruzar sobre un puente, que como hemos dicho es una estructura elástica con sus propias frecuencias naturales de vibración, en caso de que conserven su marcha acompañada se corre el peligro de que su frecuencia de golpeteo – aproximadamente de 1 Hz- coincida con alguna de las

frecuencias naturales del puente; hay que tomar en cuenta además que la fuerza del golpe colectivo puede alcanzar magnitudes de decenas de miles de N, para evitar ese peligro es que a las formaciones de soldados se les ordena romper la marcha cuando cruzan un puente.

2) Es una experiencia común que cuando se escucha música dentro de un cuarto, algunas veces cuando aparecen sonidos de frecuencia muy baja los vidrios de las ventanas empiezan a vibrar violentamente. Esto ocurre, naturalmente, porque hay un fenómeno de resonancia, ya que la frecuencia de los sonidos bajos coincide con alguna de las frecuencias naturales de oscilación de los vidrios de las ventanas.

3) Los autos están hechos de muchas partes elásticas, como por ejemplo el volante; de hecho se le puede dar un golpe y se siente inmediatamente su vibración; pues bien, cuando el motor genera vibraciones que coinciden con la frecuencia natural de vibración del volante sucede el fenómeno de resonancia; es por ello que los diseñadores de las carrocerías deben tener en cuenta que la potente fuente de vibraciones del motor no provoque la coincidencia con las frecuencias naturales de los componentes [3].

4) El cuerpo humano está conformado con estructuras elásticas como son los huesos, y es así que en el mundo de la medicina laboral se debe cuidar que la frecuencia de golpeteo de máquinas como los taladros que rompen las capas de pavimento, no coincida con la frecuencia natural de algunas de las partes de la estructura ósea. Cuando el cuerpo humano está sometido a vibraciones de baja frecuencia, éste se mueve como un todo, pero a frecuencias altas la respuesta del cuerpo es específica; así de 4 a 12 Hz las caderas y los hombros comienzan a resonar, entre 20 y 30 Hz es el cráneo el que resuena, a frecuencias más altas de 60 a 90 Hz son los globos oculares los que pueden entrar en resonancia.

5) Un caso muy conocido de resonancia es cuando un o una cantante dirigen su voz hacia una copa de cristal ; es aparente que la copa es una estructura elástica que vibra a frecuencias claramente reconocibles por el oído humano (ver figura 2 ), por tanto, el afinado oído de los cantantes se entona con esos sonidos y lanza contra la copa un sonido potente de la misma frecuencia, con ello se forman en la copa ondas estacionarias, y si mantienen el tiempo suficiente la intensidad y la frecuencia, se produce el fenómeno de resonancia hasta que la copa se rompe ver figura 3).

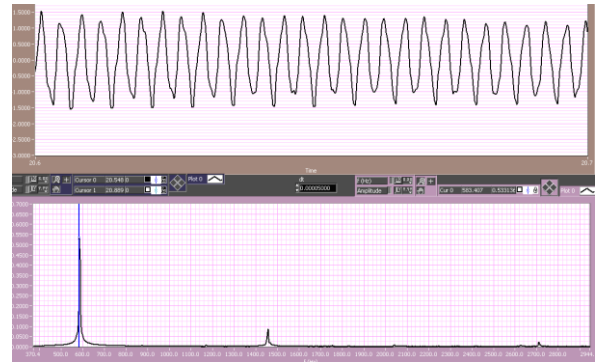


Figura 2. Ondas en una copa y frecuencias naturales de la copa

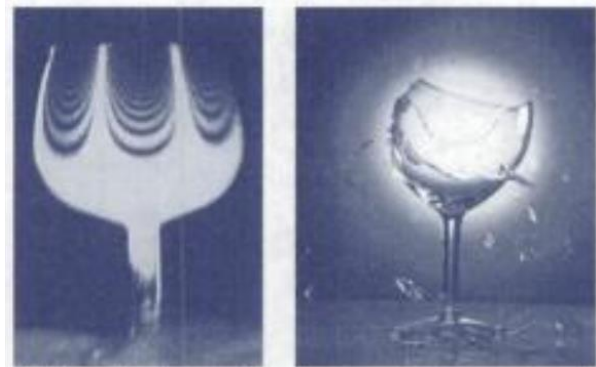


Figura 3. Momento en que la copa se rompe por efecto de la resonancia

En esta figura se muestra en la parte superior el sonido que produce una copa de vidrio; en la parte intermedia se observa su espectro de frecuencias y se ve como ante todo predomina una frecuencia; finalmente en la parte inferior se somete la copa a un sonido con una frecuencia igual a la frecuencia natural de la copa hasta que debido a la intensidad de los esfuerzos inducidos la copa se rompe.

6) En el mundo animal tenemos también ejemplos muy hermosos de resonancia; por ejemplo ¿cómo pueden los mosquitos machos detectar a los mosquitos hembras? De acuerdo a H. Schmidt las frecuencias de aleteo de los machos y las hembras son diferentes; los machos aletean a una frecuencia aproximada de 500 Hz, mientras que las hembras lo hacen a una frecuencia aproximada de 300 Hz (ver figura 5); pues bien, se encuentra que las antenas de los machos tienen una frecuencia natural de vibración muy cercana a los 300 Hz, por tanto, el aleteo de las hembras provoca en ellos resonancia de sus antenas y es así como se efectúa el reconocimiento.

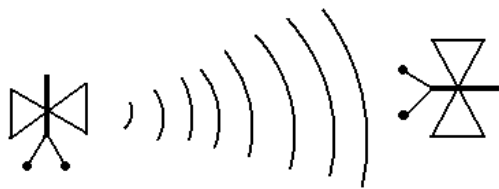


Figura 4. Aleteo de la hembra y vibración de las antenas de los moscos machos

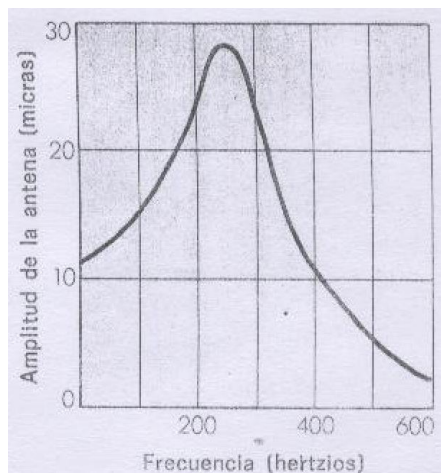


Figura 5. Frecuencia de vibración de las antenas de los moscos machos

7) Finalmente un ejemplo muy drástico de los efectos destructivos que pueden producirse en caso de resonancia se presenta cuando una ciudad es afectada por un sismo; la ciudad está llena de estructuras elásticas de gran escala, tales como edificios y puentes; la frecuencia de los sismos, es decir, la frecuencia con que se mueve el suelo, está ante todo en el rango de los 0.5 -2 Hz, son frecuencias relativamente bajas, pero las grandes masas de los edificios de más de 5 pisos de altura por su propia inercia tienden a tener frecuencias bajas y propician por tanto la ocurrencia del fenómeno de resonancia. En este caso la amplitud de las oscilaciones mecánicas de los edificios tiende a crecer tanto en cada ciclo que pueden llegar al punto de ruptura, tal como sucedió con muchos edificios en el gran terremoto de la ciudad de México en 1985 [ ].

## V. LA RESONANCIA EN LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y ELECTRÓNICOS

Al igual que en los sistemas mecánicos, los circuitos eléctricos y electrónicos pueden presentar el fenómeno de resonancia cuando son excitados con señales eléctricas variantes en el tiempo y periódicas. La frecuencia de resonancia está determinada por las características y valores de los elementos que componen al circuito.

La resonancia puede ser aprovechada para llevar a cabo las funciones de un sistema eléctrico o electrónico como en el caso de un receptor de radio, o puede ser un fenómeno perjudicial que afecte o altere el correcto funcionamiento de un aparato como en el caso de la interferencia electromagnética o EMI [8].

### Análisis de resonancia en circuito RLC.

A continuación, se presenta el análisis de un circuito RLC excitado mediante un voltaje variable en el tiempo y periódico representado por la función:

$$v(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (9)$$

Donde la frecuencia en Hertz está dada por:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (10)$$

Mientras que la fase por simplicidad se establecerá como:  $\varphi = 0 \text{ rad}$

Podemos escribir la ecuación 9 alternativamente como:

$$v(t) = \text{Re}[Ae^{j\omega t} e^{j\varphi}] \quad (11)$$

Donde  $j = \sqrt{-1}$

Lo que nos capacita para definir un voltaje de entrada como fasor complejo:

$$v_{in} = Ae^{j\varphi} = A \angle 0 \quad (12)$$

En la Figura 6, se disponen los elementos del circuito conectado en serie, donde R representa un resistor, L un inductor y C un capacitor.

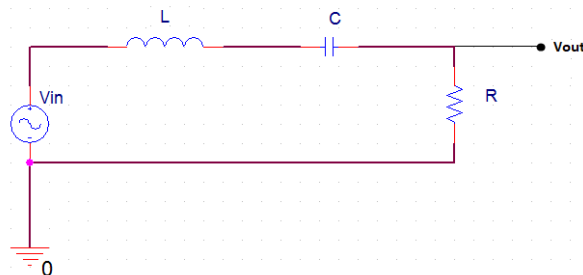


Figura 6. Conexión de elementos para circuito RLC serie

En el dominio de la frecuencia podemos definir la impedancia de los elementos como:

$$Z_L = j\omega L \quad (13)$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (14)$$

Luego por divisor de voltaje podemos obtener el voltaje de salida:

$$v_{out} = \frac{Rv_{in}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (15)$$

Para evaluar el cociente de (15), se puede convertir numerador y denominador a su forma polar por lo que la magnitud de  $v_{out}$  es:

$$|v_{out}| = \frac{Rv_{in}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (16)$$

Si derivamos (16) respecto a  $\omega$ , e igualamos a cero podemos encontrar el valor de frecuencia en el cual la magnitud de  $v_{out}$  es máxima.

Procediendo:

$$\frac{d}{d\omega} \left( \frac{Rv_{in}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \right) = - \frac{Rv_{in} \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \left( L + \frac{1}{\omega^2 C} \right)}{\left( R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right)^{3/2}} = 0 \quad (17)$$

Observando el numerador de (17) existen las siguientes posibilidades para que la ecuación se cumpla:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$L + \frac{1}{\omega^2 C} = 0$$

Al resolver para  $\omega$ , la única solución real y positiva a (17) es:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (18)$$

Así queda demostrado que en un circuito RLC existe sólo una frecuencia que produce una tensión máxima a la salida. Ésta es la frecuencia de resonancia.

### Aplicaciones prácticas de la resonancia en circuitos eléctricos y electrónicos.

1) La captación de ondas de radio, requiere para su realización de un filtro que nos ayude a seleccionar un intervalo de frecuencias específico entre la multitud de señales que existen en el ambiente. Este circuito puede realizarse a través de un circuito LC conectado a una antena y a tierra que nos permita amplificar las señales ubicadas

alrededor de su frecuencia de resonancia y atenuar aquellas que no son de interés.

2) La frecuencia de resonancia de un circuito eléctrico puede usarse como base para generar oscilaciones eléctricas periódicas que a su vez son utilizadas para modular señales de información y crear transmisores de radio frecuencia.

Los osciladores eléctricos también tienen utilidad en la generación de sonidos artificiales de diferentes frecuencias para un sintetizador de audio.

3) Los aparatos electrónicos en la actualidad funcionan con una diversidad de señales eléctricas internas tanto analógicas como digitales. Cada una de estas señales poseen un espectro de frecuencia que no debe ser modificado o alterado ya que pondría en riesgo el correcto funcionamiento de dicho aparato. Sin embargo, las interferencias electromagnéticas o EMI pueden acoplarse a nuestros equipos de manera inalámbrica por la captación de emisiones radiadas de otros aparatos o de manera conducida a través de los cables de conexión entre uno y otro aparato o por los cables de alimentación. Una posibilidad para mitigar estos efectos es adecuar filtros basados en elementos de circuitos eléctricos que nos ayuden a rechazar o atenuar las señales indeseadas sin afectar el correcto funcionamiento de las señales propias de nuestro dispositivo. En esta categoría se encuentran los filtros de línea. Los filtros de rechazo banda, los capacitores de desacople entre otros.

### AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo de la COFAA para la elaboración de este trabajo.

### REFERENCIAS

- [1] Feynman, Física, Addison Wesley Iberoamericana, 1987.
- [2] <https://youtu.be/wiRG69LZhuM>, consulta del 1 de junio del 2022
- [3] [https://youtu.be/i709Y0\\_5NOc](https://youtu.be/i709Y0_5NOc), consulta del 2 de julio del 2022
- [4] Servicio sismológico nacional
- [5] <https://youtu.be/ULLOAGWla7M>
- [6] [https://youtu.be/Qv\\_dPAr5AhY](https://youtu.be/Qv_dPAr5AhY)
- [7] <https://youtu.be/v3cpKaJm0rY>
- [8] Paul, Clayton R. Introduction to Electromagnetic Compatibility. 2da Edición. s.l. : Wiley, 2006.