# Triángulos unitarios de la matriz CKM en la Parametrización Estándar

**S. Rebeca Juárez Wysozka [1], Piotr Kielanowski [2], Liliana Vázquez Mercado [3]**

[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional. U.P Adolfo López Mateos
C.P. 07738. Ciudad de México, México
[2]Departamento de Física, Centro de Investigación y Estudios Avanzados
Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, C.P. 07000 Ciudad de México, México
[3]Departamento de Física, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Universidad de Guadalajara, Av. Revolución 1500, Colonia Olímpica C.P. 44430 Guadalajara, Jalisco, México
rebecajw@gmail.com, piotr.kielanowski@cinvestav.mx, liliana.vmercado@academicos.udg.mx

## RESUMEN/ABSTRACT

Discutimos la determinación de las longitudes de los lados y los ángulos de los triángulos unitarios usando la Parametrización Estándar de la matriz CKM y estudiamos la propagación de los errores de los parámetros –en las mediciones experimentales- de la matriz CKM en los valores de ángulos y longitudes de los triángulos unitarios, para diferentes casos.

## I. INTRODUCCIÓN

El Modelo Estándar (ME) de partículas elementales [1-7] provee una descripción muy precisa del espectro e interacciones de las partículas elementales. El ME contiene al sector de quarks y leptones. Muchos de los parámetros fenomenológicos en el ME están contenidos en el sector de los quarks, que está relacionado con las interacciones de Yukawa de quarks. Información importante acerca de dichas interacciones es provista por las masas de los quarks y la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [8, 9]. La matriz CKM es la matriz unitaria de $3\times3$ [10], que consta de 4 parámetros independientes, por la libertad de refase de los campos de quarks. Los ángulos generados por la matriz CKM a través de su unitariedad, son medibles experimentalmente. Así que, la gran importancia de la matriz CKM radica en que ésta establece la conexión entre los resultados evaluados teóricamente y la realidad experimental y junto con las masas de los quarks es la única fuente de información sobre la estructura del sector de Yukawa del ME.

## II. METODOLOGÍA

El Grupo de Datos de Partículas (PDG, por sus siglas en inglés, *Particle Data Group*) [11, 12] recomienda una Parametrización Estándar de la matriz CKM, que es la siguiente:

$$V_{CKM}=\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$=\begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{13}-c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta} & c_{12}c_{23}-s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23}-c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23}-s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}.$$

Donde $s_{ij} = sen\,\theta_{ij}, c_{ij} = cos\,\theta_{ij}$ y $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ y $\delta$ son los parámetros que se determinan de forma experimental.
La unitariedad de la matriz CKM implica que las filas y las columnas sean ortonormales. Lo que significa que obedecen 12 relaciones

- La norma de cada una de las filas y columnas es igual a 1 (6 relaciones).
- Las diferentes filas (columnas) son ortogonales (6 relaciones).

La ortogonalidad de filas y columnas genera las siguientes relaciones

$$V_{ud}V_{us}^* + V_{cd}V_{cs}^* + V_{td}V_{ts}^* = 0 \quad (2.a)$$
$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0 \quad (2.b)$$
$$V_{us}V_{ub}^* + V_{cs}V_{cb}^* + V_{ts}V_{tb}^* = 0 \quad (2.c)$$
$$V_{ud}V_{cd}^* + V_{us}V_{cs}^* + V_{ub}V_{cb}^* = 0 \quad (2.d)$$
$$V_{ud}V_{td}^* + V_{us}V_{ts}^* + V_{ub}V_{tb}^* = 0 \quad (2.e)$$
$$V_{cd}V_{td}^* + V_{cs}V_{ts}^* + V_{cb}V_{tb}^* = 0 \quad (2.f)$$

Cada una de las expresiones en (2) representa un triángulo en el plano complejo. Entonces vemos que la unitariedad de la matriz CKM implica la existencia de 6 triángulos unitarios [13-15].

Los parámetros $\theta_{ij}$ y $\delta$ han sido determinados experimentalmente y son iguales a [11]

$$\text{sen}\,\theta_{12}=0.22650 \pm 0.00048, \quad \text{sen}\,\theta_{13}=0.00361\,^{+0.00011}_{-0.00009},$$
$$\text{sen}\,\theta_{23}= 0.04053\,^{+0.00083}_{-0.00061}, \quad \delta = 1.96^{+0.045}_{-0.043}. \quad (3)$$

En este trabajo discutiremos la determinación de las longitudes de los lados y ángulos de los triángulos de unitariedad en (2) a partir de los valores dados en (3).

## III. DETERMINACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS UNITARIOS

Cada triángulo en (2) tiene un conjunto de parámetros sobre determinado, que son las longitudes de los lados y los ángulos. Definamos esos parámetros en el ejemplo del triángulo dado por (2a). Los lados de este triángulo son

$$l_1 = |V_{ud}V_{us}^*|,\ l_2 = |V_{cd}V_{cs}^*|,\ l_3 = |V_{td}V_{ts}^*|. \quad (4)$$

Y para el resto de los triángulos, los lados están definidos de la misma manera a través de las ecuaciones (2) para cada triángulo.

Los ángulos del triángulo unitario en (2a) están definidos

$$\phi_1 = \arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cs}^*}{V_{td}V_{ts}^*}\right),$$
$$\phi_2 = \arg\left(-\frac{V_{td}V_{ts}^*}{V_{ud}V_{us}^*}\right), \quad (5)$$
$$\phi_3 = \arg\left(-\frac{V_{ud}V_{us}^*}{V_{cd}V_{cs}^*}\right).$$

Y para el resto de triángulos los ángulos correspondientes están definidos de la misma manera.
Usando (3) para los valores de los parámetros $\theta_{ij}$ y $\delta$ y varios casos para los errores de estos parámetros, determinamos a partir de (1) los valores de los elementos $V_{ij}$ de la matriz CKM y luego de (4) evaluamos los valores de los lados de todos los triángulos y de (5) determinamos los valores de estos ángulos. Consideremos los siguientes 5 casos

**Caso 1:** Los errores de los parámetros publicados por el PDG [11] están dados en (3).

**Caso 2:** El error $\Delta\theta_{12}$ es reducido a la mitad $\Delta\,sen\,\theta_{12} = 0.00024$.
Todos los errores restantes están dados como en el Caso 1.

**Caso 3:** El error $\Delta\theta_{13}$ es reducido a la mitad: $\Delta\,sen\,\theta_{12} = 0.0005$. Todos los errores restantes están dados como en el Caso 1.

**Caso 4:** Error $\Delta\theta_{23}$ es reducido a la mitad: $\Delta\,sen\,\theta_{23} = 0.00035$. Todos los errores restantes están dados como en el Caso 1.

**Caso 5:** Error $\Delta\delta$ es reducido por a la mitad: $\Delta\delta = 0.022$. Todos los errores restantes están dados como en el Caso 1.

En la **Tabla I**, reportamos los valores de los lados y los errores correspondientes a cada caso.

Las longitudes de los lados son iguales para cada caso y están reportados en la columna titulada "Valor". Es interesante observar cómo los errores de las longitudes son modificados de acuerdo con el caso considerado. Escribimos en rojo los errores que fueron significativamente reducidos en comparación con el Caso 1 y observamos el siguiente patrón:

- Reducción del error de $\theta_{12}$ reduce los errores de los lados de los Triángulos 1 y 4.
- Reducción del error de $\theta_{13}$ reduce los errores de los lados de los Triángulos 2, 3 y 5.
- Reducción del error de $\theta_{23}$ reduce los errores de los lados de todos los Triángulos.
- Los valores de los errores de los lados de los triángulos dependen débilmente del error de la fase $\delta$.

**Tabla I.** Las longitudes de los lados de los triángulos de unitariedad. Las longitudes calculadas de los lados de los triángulos de unitariedad están dadas en la tercera columna y las columnas cuyo encabezado es "Error Caso…" contienen los errores calculados de las longitudes. Las entradas con errores reducidos se destacan en rojo.

| Triángulo | Lado | Valor | Error Caso 1 | Error Caso 2 | Error Caso 3 | Error Caso 4 | Error Caso 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $l_1$ | 0.220 611 | 0.000 442 | 0.000 221 | 0.000 442 | 0.000 442 | 0.000 442 |
| | $l_2$ | 0.220 299 | 0.000 442 | 0.000 221 | 0.000 442 | 0.000 442 | 0.000 442 |
| | $l_3$ | 0.000 340 | 0.000 013 | 0.000 013 | 0.000 013 | 0.000 008 | 0.000 012 |
| 2 | $l_1$ | 0.003 516 | 0.000 375 | 0.000 375 | 0.000 209 | 0.000 375 | 0.000 364 |
| | $l_2$ | 0.009 175 | 0.000 164 | 0.000 163 | 0.000 164 | 0.000 084 | 0.000 164 |
| | $l_3$ | 0.008 537 | 0.000 216 | 0.000 216 | 0.000 216 | 0.000 173 | 0.000 170 |
| 3 | $l_1$ | 0.000 818 | 0.001 613 | 0.001 613 | 0.000 897 | 0.001 613 | 0.001 565 |
| | $l_2$ | 0.039 443 | 0.000 038 | 0.000 038 | 0.000 038 | 0.000 019 | 0.000 038 |
| | $l_3$ | 0.039 750 | 0.000 046 | 0.000 046 | 0.000 046 | 0.000 037 | 0.000 037 |
| 4 | $l_1$ | 0.220 482 | 0.000 442 | 0.000 221 | 0.000 442 | 0.000 442 | 0.000 442 |
| | $l_2$ | 0.220 428 | 0.000 442 | 0.000 221 | 0.000 442 | 0.000 442 | 0.000 442 |
| | $l_3$ | 0.000 146 | 0.000 014 | 0.000 014 | 0.000 014 | 0.000 009 | 0.000 013 |
| 5 | $l_1$ | 0.008 322 | 0.000 014 | 0.000 014 | 0.000 009 | 0.000 013 | 0.000 014 |
| | $l_2$ | 0.009 011 | 0.000 006 | 0.000 007 | 0.000 007 | 0.000 003 | 0.000 006 |
| | $l_3$ | 0.003 607 | 0.005 417 | 0.005 417 | 0.005 413 | 0.004 319 | 0.004 249 |
| 6 | $l_1$ | 0.001 934 | 0.000 001 | 0.000 001 | 0.000 001 | 0.000 001 | 0.000 001 |
| | $l_2$ | 0.038 717 | 0.000 120 | 0.000 120 | 0.000 120 | 0.000 061 | 0.000 120 |
| | $l_3$ | 0.040 496 | 0.010 148 | 0.010 148 | 0.009 339 | 0.007 266 | 0.009 576 |

Ahora analicemos los resultados para los ángulos de los triángulos de unitariedad en la Tabla II. La columna con el encabezado "Valor" nos da los valores de los ángulos y la columna "Error Caso 1" nos da los valores de los errores de dichos ángulos. Los errores calculados para algunos de esos ángulos son mayores que sus valores, lo que significa que estos ángulos están determinados de forma muy pobre. Observamos cómo los errores de los ángulos son modificados de acuerdo al caso considerado. Marcamos en rojo los errores que fueron significativamente reducidos en comparación con el Caso 1 y encontramos los siguientes patrones:

- Reducción del error de $\theta_{12}$ reduce los errores de los ángulos de los Triángulos 1 y 4.
- Reducción del error de $\theta_{13}$ reduce los errores de los ángulos de los Triángulos 2 y 3.
- Reducción del error de $\theta_{23}$ reduce los errores de los ángulos de los Triángulos 2, 5 y 6.
- Reducción del error de $\delta$ reduce los errores de los ángulos del Triángulo 5.

**Tabla II.** Los valores de los ángulos de los triángulos de unitariedad. Los ángulos calculados de los triángulos de unitariedad están dadas en la tercera columna y las columnas cuyo encabezado es "Error Caso…" contienen los errores calculados de los ángulos. Las entradas con errores reducidos se destacan en rojo.

| Triángulo | Ángulo | Valor | Error Caso 1 | Error Caso 2 | Error Caso 3 | Error Caso 4 | Error Caso 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\alpha_1$ | 156.372 000 | 263.300 470 | 131.836 620 | 263.288 770 | 263.233 470 | 263.285 890 |
| | $\alpha_2$ | 23.592 900 | 262.928 710 | 131.650 440 | 262.917 030 | 262.861 830 | 262.914 160 |
| | $\alpha_3$ | 0.035 383 | 0.371 757 | 0.186 186 | 0.371 741 | 0.371 645 | 0.371 732 |
| 2 | $\alpha_1$ | 22.531 400 | 2.550 450 | 2.550 112 | 1.457 475 | 2.526 704 | 2.475 692 |
| | $\alpha_2$ | 88.976 400 | 5.128 602 | 5.113 938 | 4.720 030 | 3.971 735 | 4.612 764 |
| | $\alpha_3$ | 68.492 200 | 4.305 846 | 4.290 908 | 4.303 113 | 3.088 483 | 3.713 301 |
| 3 | $\alpha_1$ | 1.096 840 | 2.518 464 | 2.518 461 | 1.400 748 | 2.518 338 | 2.442 719 |
| | $\alpha_2$ | 67.430 700 | 44.697 000 | 44.695 302 | 25.137 407 | 44.579 129 | 43.313 542 |
| | $\alpha_3$ | 111.472 000 | 47.206 362 | 47.204 727 | 26.522 090 | 47.093 035 | 45.748 996 |
| 4 | $\alpha_1$ | 111.472 000 | 263.081 640 | 131.630 240 | 263.070 170 | 263.057 940 | 263.072 080 |
| | $\alpha_2$ | 68.492 200 | 263.017 650 | 131.598 180 | 263.006 190 | 262.993 980 | 263.008 100 |
| | $\alpha_3$ | 0.035 383 | 0.064 074 | 0.032 235 | 0.064 071 | 0.063 998 | 0.064 054 |
| 5 | $\alpha_1$ | 67.430 700 | 1.556 959 | 1.556 906 | 1.546 421 | 1.245 341 | 1.229 692 |
| | $\alpha_2$ | 88.976 400 | 35.762 430 | 35.762 427 | 35.739 905 | 28.515 791 | 28.056 188 |
| | $\alpha_3$ | 23.592 900 | 37.298 837 | 37.298 837 | 37.275 771 | 29.740 721 | 29.261 129 |
| 6 | $\alpha_1$ | 1.096 840 | 34.611 090 | 34.611 089 | 31.851 847 | 24.781 101 | 32.660 279 |
| | $\alpha_2$ | 22.531 400 | 749.960 850 | 749.960 850 | 690.173 110 | 536.962 130 | 707.690 350 |
| | $\alpha_3$ | 156.372 000 | 784.571 940 | 784.571 940 | 722.024 960 | 561.743 230 | 740.350 630 |

## IV. CONCLUSIONES

Hemos estudiado los triángulos de unitariedad de la matriz CKM y analizado cómo la reducción en el error de los parámetros estándar de la matriz CKM se propagan a los errores de las longitudes de los lados y los ángulos de los triángulos unitarios. Resulta que el error de $\theta_{12}$ tiene influencia en los Triángulos 1 y 4; el error de $\theta_{13}$ tiene influencia en los Triángulos 2, 3 y 5; el error de $\theta_{23}$ tiene influencia en la mayoría de los Triángulos, mientras que el error de la fase $\delta$ tiene una influencia menor en los parámetros de los triángulos. El resultado más impactante es que los errores en los ángulos de los Triángulos 1, 4 y 6 son mayores que los valores de los ángulos mismos. El método alternativo para determinar los parámetros de los triángulos de unitariedad está dado en [16].

## AGRADECIMIENTOS

Investigación parcialmente financiada por el Proyecto SIP: 20221030, Secretaría de Investigación y Posgrado, Beca EDI y Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas (COFAA) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), México.

## REFERENCIAS

[1] S.L. Glashow, Partial Symmetries of Weak Interactions, Nucl. Phys. 22 (1961), 579-588.
[2] S.L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani, Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry, Phys. Rev. D 2 (1970), 1285-1292.
[3] Steven Weinberg, A Model of Leptons, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 12641266.
[4] Abdus Salam, Weak and electromagnetic interactions in Elementary Particle Theory. Relativistic Groups and Analyticity (Nils Svartholm, ed.), Interscience (Wiley), New York, and Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1969, Proceedings of the Eighth Nobel Symposium, 400 pp, pp. 367-377.
[5] F. Englert and R. Brout, Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons, Phys. Rev. Lett. 13 (1964), 321-323.
[6] Peter W. Higgs, Broken symmetries and the masses of gauge bosons, Phys. Rev. Lett. 13 (1964), 508-509.
[7] P. W. Higgs, Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons, Phys. Rev. 145 (1966), 1156-11603.
[8] N. Cabibbo, Unitary Symmetry and Leptonic Decays, Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 531–533.
[9] M. Kobayashi and T. Maskawa, CP-Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction, Prog. of Theor. Phys. 49 (1973) 652–657.
[10] Zhi-zhong Xing, Flavor structures of charged fermions and massive neutrinos, Physics Reports 854 (2020) 1-147.
[11] P.A. Zyla et al. (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. 2020, 083C01 (2020). Sections 12.1, 12.4 and 12.5.
[12] CKMfitter Group (J. Charles et al.), Eur. Phys. J. C41, 1-131 (2005) [hep-ph/0406184], updated results and plots available at: http://ckmfitter.in2p3.fr.
[13] Zhi-zhong Xing, Flavor structures of charged fermions and massive neutrinos, Phys. Rep. 854 (2020) 1-147.
[14] Cecilia Jarlskog and Raymond Stora, Unitarity Polygons and CP Violation Areas and Phases in the Standard Electroweak Model, Phys. Lett. B208 (1988), 268-274.
[15] Zhi-zhong Xing, Di Zhang, Distinguishing between the twin b-flavored unitarity triangles on a circular arc, Phys. Lett. B 803 (2020), 135302 [arXiv:1911.03292 [hep-ph]].
[16] Zhi-zhong Xing, Di Zhang, Towards establishing the second b-flavored CKM unitarity triangle, [arXiv:2010.02741 [hep-ph]] (2020). To appear in the 40th International Conference on High Energy physics (ICHEP2020).
[17] S. Rebeca Juárez Wysozka, Piotr Kielanowski, Liliana Vazquez Mercado, Quark unitarity triangles, e-Print: 2205.12455 [hep-ph], 25 May 2022.