SOBRE LA TRANSFORMACIÓN DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN RELATIVIDAD ESPECIAL

Víctor Granados García.[1,], Mauricio E. Juárez Peña[1], Carlos Germán Pavía Miller[2,1]*

[1]Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional.

[2]Departamento de Ciencias Básicas. DCBI. Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco.

RESUMEN

Estudiamos las leyes de Gauss y Ampere para líneas de carga y corriente infinitas. Establecemos la relación entre los campos $\boldsymbol{B}$ y $\mathbf{E}$ con las trasformaciones relativistas del campo electromagnético

INTRODUCCIÓN

Gauss introdujo el teorema que permitió establecer el teorema de Gauss para el flujo de campo eléctrico y la carga encerrada en el interior de la superficie con que se calcula el flujo. Pauli ha observado que esta es una ley topológica, en el sentido de que el resultado no depende de las superficies que se usen para evaluar el flujo, siempre que estas puedan ser mapeadas, una en otra y sin singularidades. Aunque sabemos que la superficie se escoge de tal simetría que reduzca o simplifique el cálculo para determinar el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en electroestática. Para el cálculo de campos magnéticos Ampere introdujo la ley circuital de Ampere, Jackson ha observado que esta ley es equivalente a la de Gauss, pero para calcular campos magnéticos estacionarios $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$. Como la ley de Gauss, la de Ampere, es también de tipo topológico ya que no depende de las trayectorias usadas para calcular la integral de línea, siempre y cuando las trayectorias puedan mapearse una en otra de forma continua. En la teoría Especial de la Relatividad, Lorentz, Poincaré, Einstein y Minkowski y con la Electrodinámica de los Cuerpos en Movimiento determinaron la trasformación del campo electromagnético $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ de un sistema inercial en otro. Así mostraron que los campos eléctricos y magnéticos son formas diferentes del mismo fenómeno y depende de cómo nos los describa depende del estado de movimiento relativo entre el observador y el sistema electromagnético. De esta misma sabemos que sus postulados nos dicen que la rapidez c es igual en todos los sistemas inerciales y que las leyes de la física deben ser iguales en todos los sistemas inerciales. En este artículo usamos la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico de una línea infinita de carga en el eje x y luego con la ley circuital de Ampere el campo de una línea de corriente uniforme infinita en el eje x. A continuación, demostramos las ecuaciones de trasformación del campo electromagnético de un sistema inercial S a otro inercial S' que se mueve con velocidad v constante a lo largo del eje x. Usamos un método análogo al usado por Einstein con la trasformación espacio tiempo de Lorentz. Consideramos una línea de carga uniforme infinita en el sistema S' móvil para determinar el campo magnético de una línea infinita de corriente en el sistema S con el método simple de Alonso y Finn, pero ilustrativo. Finalmente, con las transformaciones del campo electromagnético en forma analítica, encontraremos los campos $\boldsymbol{E}$ y $\mathbf{B}$ en el sistema S en relación a el campo $\boldsymbol{E'}$ de la línea de carga infinita en S' y determinamos los escalares invariantes de Poincaré P_1 y P_2, lo cuales cumplen que si P_1 es nulo se puede encontrar siempre un sistema de referencia donde $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{B}$ son nulos, esto es el campo es puramente eléctrico o magnético y lo mismo se cumple recíprocamente.

CAMPOS E Y B CON LAS LEYES DE GAUSS Y AMPERE.

Calculamos mediante la ley de Gauss el campo $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ de una línea de carga infinita homogénea, con una densidad de carga $\lambda = dq/dx$ a lo largo del eje x. Para calcular el flujo eléctrico en la ley de Gauss

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\, ds = \frac{q}{\varepsilon_0}\,, \tag{1}$$

ya que a las distancias x y $-x$ asignamos cargas eléctricas $q = \lambda dx$, estás de acuerdo a la ley de Coulomb producen un campo eléctrico perpendicular al eje x, es decir, tenemos $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$, donde $\hat{\boldsymbol{r}}$ es el vector unitario en coordenadas cilíndricas en el plano yz. Como superficie tomamos un cilindro con el eje x de simetría, radio r normal $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{r}}$ y altura comprendida entre $-L$ y L. Así $\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{r}} = E(r)$ y la integral de Gauss de la Ec. (1) es

$$E(r) * 2\pi r * 2L = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{-L}^{L}\lambda dx = \frac{2L\lambda}{\varepsilon_0}\,,\quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{\boldsymbol{r}}\,, \tag{2}$$

donde $r^2 = y^2 + z^2$. Para calcular el campo magnético de la línea de corriente infinita, con corriente I a lo largo del eje x, usamos la ley circuital de Ampere

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \mu_0 I\,, \tag{3}$$

sabemos que las líneas del campo magnético son cerradas, con la regla de la mano derecha, se impone por simetría que las trayectorias sean una circunferencia con un radio r y $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B\hat{\boldsymbol{\theta}}$, donde $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es el vector unitario de las coordenadas cilíndricas tal que $\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$. Tenemos por lo tanto $\boldsymbol{dl} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\,dr$, asi que

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = B\oint dr = B * 2\pi r = \mu_0 I,\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\theta}}\,. \tag{4}$$

Así mientras que las líneas de campo $\boldsymbol{E}$ son radiales y perpendiculares al eje x, las líneas del campo $\boldsymbol{B}$ son cerradas y el campo $\boldsymbol{B}$ es tangente a una circunferencia con un el radio $r^2 = y^2 + z^2$.

TRANSFORMACIÓN RELATIVISTA DE LOS CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

Las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético en el sistema MKS son las siguientes en el sistema inercial S

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0\,, \tag{5}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\,, \tag{6}$$

donde el operador nabla y el tiempo se refieren a las coordenadas tiempo espacio en el sistema S

$$x^{\mu} = (ct, x, y, z) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)\,. \tag{7}$$

Por la covarianza del principio de relatividad las ecuaciones de Maxwell en otro sistema inercial que se mueve a lo largo del eje x con velocidad v constante, S' son

$$\nabla'\cdot\boldsymbol{E}' = \frac{\rho'}{\varepsilon_0},\quad \nabla'\cdot\boldsymbol{B}' = 0\,, \tag{8}$$

$$\nabla'\times\boldsymbol{E}' = -\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t'},\nabla'\times\boldsymbol{B}' = \mu_0\boldsymbol{j}' + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial t'}\,, \tag{9}$$

donde el operador nabla primado en S' se refiere a las coordenadas tiempo espacio

$$x'^{\mu} = (ct', x', y', z') = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)\,. \quad (10$$

Las coordenadas x^{μ} y x'^{μ} están relacionados por la transformación de Lorentz siguiente

$$x'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu}x^{\nu}\,, \tag{11}$$

Explícitamente

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), x' = \gamma(x - \beta ct), y' = y,\quad z' = z\,. \tag{12}$$

Como es usual $\beta = \mathrm{v}/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}$ y $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$ esta velocidad de la luz y v la velocidad constante entre S y S'. La matriz inversa a $L^{\mu-1}_{\nu}$ es la siguiente $L^{\mu}_{\nu} = L^{\mu}_{\nu}(-\beta)$ nos permite determinar la trasformación. Entonces el cuadrivector nabla en el espacio tiempo $\partial/\partial x^{\mu}$ se transforma como

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = L^{\alpha}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}},\quad \alpha, \mu = 0, 1, 2, 3\,, \tag{13}$$

explícitamente de acuerdo a la matriz L^{μ}_{ν} de la Ec. (11)

$$\frac{\partial}{\partial t} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t'} - \mathrm{v}\frac{\partial}{\partial x'}\right),\quad \frac{\partial}{\partial x} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x'} - \beta\frac{\partial}{c\partial t'}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'},\quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}\,. \tag{14}$$

Si sustituimos las Ecs.(14) en la componente y de la primera Ec.(6) tenemos

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'}\left(\gamma\left(E_z + \mathrm{v}B_y\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\left(B_y + \mathrm{v}\frac{\mathrm{E_z}}{c^2}\right)\right)\,. \tag{15}$$

Como en la Ec.(9) en S' la misma componente en y' es

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\frac{\partial B'_y}{\partial t'}\,. \tag{16}$$

Comparando las Ecs (15) y (16) igualando los términos que tienen las mismas derivadas parciales primadas nos conducen a las ecuaciones de trasformación

$$E'_x = E_x,\ E'_z = \gamma\left(E_z + \mathrm{v}B_y\right), B'_y = \gamma(B_y + \mathrm{v}E_z/c^2)\,. \tag{17}$$

Si usamos el mismo método para las componentes x y z de la Ec.(6) y la trasformación de la Ec.(14) de las derivadas parciales obtenemos las restantes

$$B'_x = B_x,\ E'_y = \gamma\left(E_y - \mathrm{v}B_z\right),\ B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{\mathrm{v}E_y}{c^2}\right)\,. \tag{18}$$

Las Ecs. (17) y (18) se pueden escribir en general en forma vectorial para las componentes paralelas (∥) y perpendiculares (⊥) al vector velocidad relativa **v** entre S y S' en la forma

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel},\ E'_{\perp} = \gamma(E_{\perp} + (\mathbf{v}\times\boldsymbol{B})_{\perp})\,, \tag{19}$$

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel},\ E'_{\perp} = \gamma(E_{\perp} + (\mathbf{v}\times\boldsymbol{B})_{\perp})\,. \tag{20}$$

Recordemos que las trasformaciones inversas a las Ecs. (17), (18), (19) y (20) se obtienen cambian v, por -v e intercambiando las primas del lado izquierdo al derecho. Así veremos que si $E'_{\perp}$ o $B'_{\perp}$ se anula en S' entonces $E_{\perp}$ es perpendicular a $B'_{\perp}$ y $B_{\perp}$ es perpendicular a $E_{\perp}$. Poincaré introdujo dos escalares invariantes P_1 y P_2 del campo electromagnético

$$\mathrm{P}_1 = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{B}',\quad \mathrm{P}_2 = \mathrm{E}^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{B}^2 = \mathrm{E}'^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{B}'^2\,. \tag{21}$$

MÉTODO DE ALONSO Y FINN.

El método de Alonso y Finn para determinar los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en S determinados por una línea de carga en S' que produce el campo eléctrico dado por la Ec. (2). Tomando en cuenta, que tenemos que aplicar la contracción de Lorentz $dx = \sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}\,dx'$, se tiene que la densidad de carga $\lambda' = dq/dx'$, se encuentra relacionada con la densidad de carga $\lambda = dq/dx$, por la expresión

$$\lambda' = \frac{dq}{dx'} = \frac{dq}{dx}\frac{dx}{dx'} = \sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}\,\lambda\,. \tag{22}$$

En S' entonces la magnitud $E' = \lambda'/2\pi\varepsilon_0 r'$ y por simplicidad Alonso y Finn toman $r' = r = y = y'$, así que

$$E'_x = 0, E'_y = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r}, E'_z = 0\,. \tag{23}$$

De las transformaciones inversas para las Ecs. (17) y (18) tenemos

$$E_x = E_z = 0,\ E_y = \gamma E'_y = \gamma\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,, \tag{24}$$

y para el campo magnético en S

$$B_x = B_y = 0,\ B_z = \frac{\gamma\mathrm{v}^2}{c^2}E'_y = \gamma\frac{\lambda'\mathrm{v}^2/c^2}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,, \tag{25}$$

donde, $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$, $\gamma\lambda' = \lambda$ y $\lambda\mathrm{v} = \left(\frac{dq}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dq}{dt} = I$. Así vemos que en S se observa E_y y una componente del campo magnético B_z que es perpendicular a E_y y E'_y.

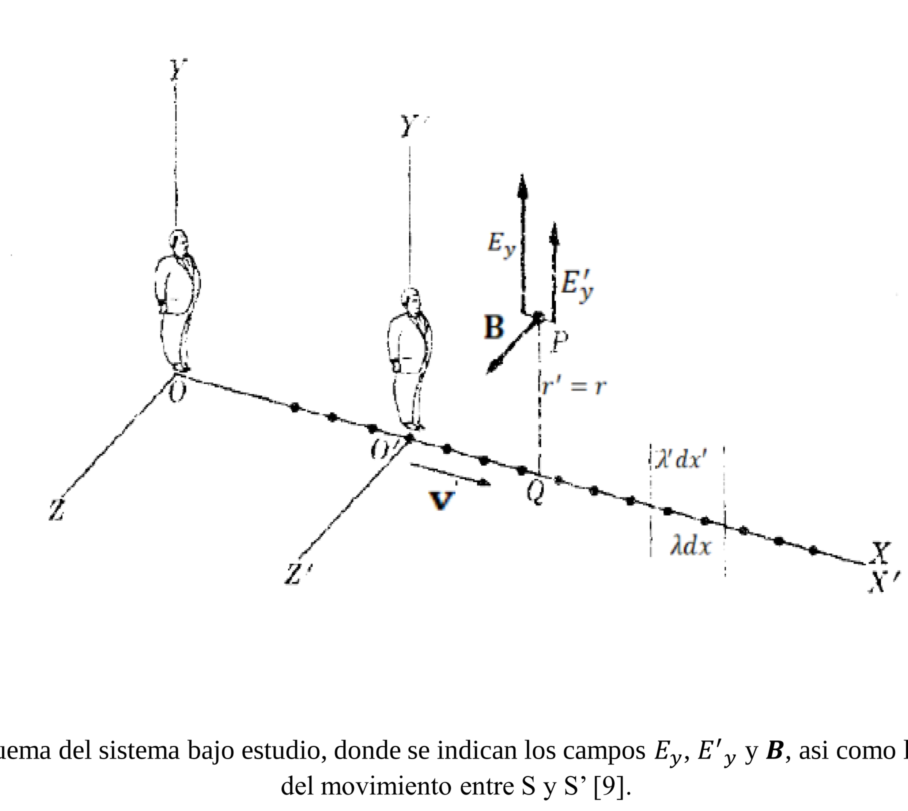

Fig.1. Esquema del sistema bajo estudio, donde se indican los campos E_y, E'_y y $\boldsymbol{B}$, asi como la dirección del movimiento entre S y S' [9].

MÉTODO ANALÍTICO GENERAL.

El método de Alonso y Finn no trata en su totalidad el problema de la transformación de los campos eléctrico y magnético, sino un caso simplificado. Recordemos que en los planos yz o $y'z'$, ya que $y' = y$ y $z = z'$, donde los vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ toman las formas siguientes $\hat{r} = (y\hat{j} + z\hat{k})/\sqrt{y^2 + z^2}$ y $\hat{\theta} = \left(-z\hat{j} + y\hat{k}\right)/\sqrt{y^2 + z^2}$, por lo que la Ec.(2) para $\boldsymbol{E}'$ en S' tiene componentes

$$E'_x = 0,\ E'_y = \frac{\lambda' y}{2\pi\varepsilon_0(y^2+z^2)}\qquad E'_z = \frac{\lambda' z}{2\pi\varepsilon_0(y^2+z^2)},\ \boldsymbol{B}' = 0\,. \tag{26}$$

De las transformaciones inversas para las Ecs. (17) y (18) obtenemos

$$E_x = 0,\ E_y = \frac{\gamma\lambda' y}{2\pi\varepsilon_0(y^2+z^2)},\quad E_z = \frac{\gamma\lambda' z}{2\pi\varepsilon_0(y^2+z^2)}\,. \tag{27}$$

$$B_x = 0,\ B_y = -\frac{\gamma\lambda'\mathrm{v}z}{2\pi\varepsilon_0 c^2\left(y^2+z^2\right)},\ B_z = \frac{\gamma\lambda'\mathrm{v}y}{2\pi\varepsilon_0 c^2(y^2+z^2)}\,. \tag{28}$$

Teniendo en cuenta que $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, $\gamma\lambda' = \lambda$ y $\lambda\mathrm{v} = I$ en las Ecs. (27) y (28) obtenemos en S

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r},\ \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}\,. \tag{29}$$

Por lo tanto P_1 y P_2 de Poincaré son

$$\mathrm{P}_1 = 0,\ \mathrm{P}_2 = \frac{\lambda'^2}{(2\pi\varepsilon_0)^2 r^2} = E'^2\,. \tag{30}$$

Como $\mathrm{P}_1 = 0$ y $\mathrm{P}_2 > 0$, podemos encontrar un sistema de referencia en el cual $\boldsymbol{B} = 0$, como es el caso. Mostremos que en efecto en el sistema S, se cumple $\mathrm{P}_2 > 0$, de la Ec. (21)

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{E}^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{B}^2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 - \mathrm{c}^2\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2\left(1 - \mathrm{c}^2\frac{{\epsilon_0}^2{\mu_0}^2 I^2}{\lambda^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2\left(1 - \mathrm{c}^2\frac{\mathrm{v}^2\lambda^2}{\mathrm{c}^4\lambda^2}\right) = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}\right) = \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2\frac{1}{\gamma^2} =$$

$$= \left(\frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2 = \frac{\lambda'^2}{(2\pi\varepsilon_0)^2 r^2}\,. \tag{31}$$

Es interesante observar que mientras las líneas de campo $\boldsymbol{E}$ son abiertas y perpendiculares al eje x, mientras que las del campo $\boldsymbol{B}$ son cerradas y tangentes a una circunferencia de radio r centrado en el eje x, siendo ambos perpendiculares entre sí como lo indica $\mathrm{P}_1 = 0$.

CONCLUSIONES.

Con la ley de Gauss obtuvimos por simetría el campo eléctrico de una línea de carga infinita y con la ley de Ampere, el campo magnético de una línea de corriente infinita. De forma simple dedujimos las trasformaciones de los campos electromagnéticos entre dos sistemas inerciales. Presentamos los invariantes de Poincaré para el campo electromagnético. Con el método sencillo, pero incompleto de Alonso y Finn tratamos la trasformación del campo eléctrico de una línea infinita de carga en S' a un campo magnético de una línea de corriente infinita en S. Finalmente de forma analítica y general determinamos en S los campos eléctrico y magnético a partir del campo eléctrico de una línea de carga infinita en S'. Concluimos que las líneas del campo $\boldsymbol{E}'$ en S' y las del campo $\boldsymbol{B}$ en S son perpendiculares entre sí, lo cual está de acuerdo con el hecho de que $\mathrm{P}_1 = 0$. Determinamos la expresión para el escalar P_2 del campo electromagnético

APÉNDICE

Mostraremos con ayuda de las Ecs. (17) y (18) de trasformación que en efecto nuestros escalares P_1 y P_2, cumplen el ser invariantes.
Comencemos con el escalar P_1, de la Ec. (21) tenemos

$$\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{B}' = E'_xB'_x + E'_yB'_y + E'_zB'_z = E'_xB'_x + \gamma\left(E_y - \mathrm{v}B_z\right)\gamma\left(B_y + \frac{\mathrm{v}E_z}{c^2}\right) +$$

$$+ \gamma\left(E_z + \mathrm{v}B_y\right)\gamma\left(B_z - \frac{\mathrm{v}E_y}{c^2}\right) = E_xB_x +$$

$$+\gamma^2\left(E_yB_y + \frac{\mathrm{v}}{c^2}E_yE_z - \mathrm{v}B_zB_y - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}B_zE_z\right) +$$

$$+\gamma^2\left(E_zB_z - \frac{\mathrm{v}}{c^2}E_yE_z + \mathrm{v}B_yB_z - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}B_yE_y\right) = E_xB_x +$$

$$+\gamma^2\left(E_yB_y - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}B_yE_y\right) + \gamma^2\left(E_zB_z - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}B_zE_z\right) = E_xB_x +$$

$$+\gamma^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)E_yB_y + \gamma^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)E_zB_z = E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\,.$$

Hemos probado que bajo nuestras ecuaciones de transformación se cuplé la invariancia de P_1, procedemos de manera análoga para P_2

$$\mathrm{E}'^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{B}'^2 = \left(E'^2_x + E'^2_y + E'^2_z\right) - \mathrm{c}^2\left(B'^2_x + B'^2_y + B'^2_z\right) =$$

$$= \left(E_x^2 + \gamma^2\left(E_y - \mathrm{v}B_z\right)^2 + \gamma^2\left(E_z + \mathrm{v}B_y\right)^2\right) -$$

$$-\mathrm{c}^2\left(B_x^2 + \gamma^2\left(B_y + \frac{\mathrm{v}E_z}{c^2}\right)^2 + \gamma^2\left(B_z - \frac{\mathrm{v}E_y}{c^2}\right)^2\right) =$$

$$= E_x^2 - c^2B_x^2 + \gamma^2\left(\left(E_y - \mathrm{v}B_z\right)^2 + \left(E_z + \mathrm{v}B_y\right)^2\right) -$$

$$-\gamma^2\mathrm{c}^2\left(\left(B_y + \frac{\mathrm{v}E_z}{c^2}\right)^2 + \left(B_z - \frac{\mathrm{v}E_y}{c^2}\right)^2\right) =$$

$$= E_x^2 - c^2B_x^2 + \gamma^2(E_y^2 - 2\mathrm{v}E_yB_z + \mathrm{v}^2B_z^2) +$$

$$+\gamma^2(E_z^2 + 2\mathrm{v}E_zB_y + \mathrm{v}^2B_y^2) - \gamma^2\mathrm{c}^2\left(B_y^2 + 2\frac{\mathrm{v}}{c^2}B_yE_z + \frac{\mathrm{v}^2}{c^4}E_z^2\right) -$$

$$-\gamma^2\mathrm{c}^2\left(B_z^2 - 2\frac{\mathrm{v}}{c^2}B_zE_y + \frac{\mathrm{v}^2}{c^4}E_y^2\right) = E_x^2 - c^2B_x^2 +$$

$$+E_y^2\gamma^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) + E_z^2\gamma^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) + \gamma^2(\mathrm{v}^2 - c^2)B_y^2 +$$

$$+\gamma^2(\mathrm{v}^2 - c^2)B_z^2 = E_x^2 - c^2B_x^2 + E_y^2\gamma^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) +$$

$$+E_z^2\gamma^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) + \gamma^2c^2\left(\frac{\mathrm{v}^2}{c^2} - 1\right)B_y^2 + \gamma^2c^2\left(\frac{\mathrm{v}^2}{c^2} - 1\right)B_z^2 =$$

$$= E_x^2 - c^2B_x^2 + E_y^2\gamma^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) + E_z^2\gamma^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) -$$

$$-\gamma^2c^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)B_y^2 - \gamma^2c^2\left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)B_z^2 =$$

$$= E_x^2 - c^2B_x^2 + E_y^2 + E_z^2 - c^2B_y^2 - c^2B_z^2 =$$

$$= E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 - c^2(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = \mathrm{E}^2 - \mathrm{c}^2\mathrm{B}^2$$

Por lo tanto, para nuestras ecuaciones de transformación, los escalares P_1 y P_2, son invariantes.

*Becario: COFAA, EDD, SIP (20220061) IPN