# Ciclo de Arrot como modelo de un sistema termodinámico con calor residual. Potencia eficiente y función ecológica

**D. A. Celaya Hernández[1], D. Ladino Luna[2], R. T. Páez Hernández[3].**

[1,2,3]AFPI, Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Autónoma Metropolitana Azcapotzalco, Ciudad de México., México., Teléfono (55) 53189504.

[1]al2153034641@azc.uam.mx, [2]dll@azc.uam.mx, [3]phrt@azc.uam.mx

**RESUMEN**

En el proceso de transferencia de calor, y su transformación en energía mecánica para producir trabajo, aparece el llamado "calor residual", que generalmente es utilizado para sobrecalentar o precalentar una substancia de trabajo en el sistema, pero podría ser utilizado también para producir trabajo extra. La representación de cómo utilizar este calor residual no es simple y no aparece generalmente en la termodinámica clásica de equilibrio. Una manera de estudiar esta situación es aprovechar el llamado ciclo nulo propuesto por Arrot. Así, en el presente manuscrito realizamos un breve estudio del ciclo nulo de Arrot, desde el punto de vista de la termodinámica de tiempos finitos, considerando las regiones de existencia física de las funciones objetivo, función ecológica y potencia eficiente, que nos muestran las restricciones de desempeño de una máquina térmica modelada como dicho ciclo. Mostramos una manera de obtener las expresiones analíticas de las mencionadas funciones objetivo, así como las regiones de existencia física de éstas, a partir de las restricciones que permitan construir sus gráficas. Podemos concluir, entre otras cosas, que es posible representar sistemas de transferencia de calor con calor residual convertido en trabajo útil, en el marco de la termodinámica de tiempos finitos.

## INTRODUCCIÓN

La eficiencia térmica se define como la razón entre la cantidad de calor convertido en trabajo y la cantidad de calor dado al sistema, cuyo valor numérico muestra que gran parte del combustible dado al sistema para producir calor se desperdicia, y una cantidad considerable de calor se pierde después de la conversión del calor en trabajo. Este calor no utilizado se conoce como calor residual, y cuando se aprovecha para realizar un precalentamiento de la substancia de trabajo, permite aumentar la eficiencia de la maquina al reducir la cantidad de combustible necesario. Pero el trabajo obtenido de la máquina no aumenta.

Sin embargo, este calor residual podría utilizarse para producir un trabajo extra. Un problema interesante seria la suposición de modelar un sistema con calor residual aprovechable en trabajo útil y no sólo en ahorro de combustible.

Una referencia interesante a este problema es el planteado en el llamado ciclo nulo (zilch cycle en inglés), utilizado en el contexto de la Primera Ley de la Termodinámica por A. S. Arrot, pero más bien planteado como un problema que busca una mejor comprensión de esta ley.

## METODOLOGÍA

### Ciclo Nulo de Arrot

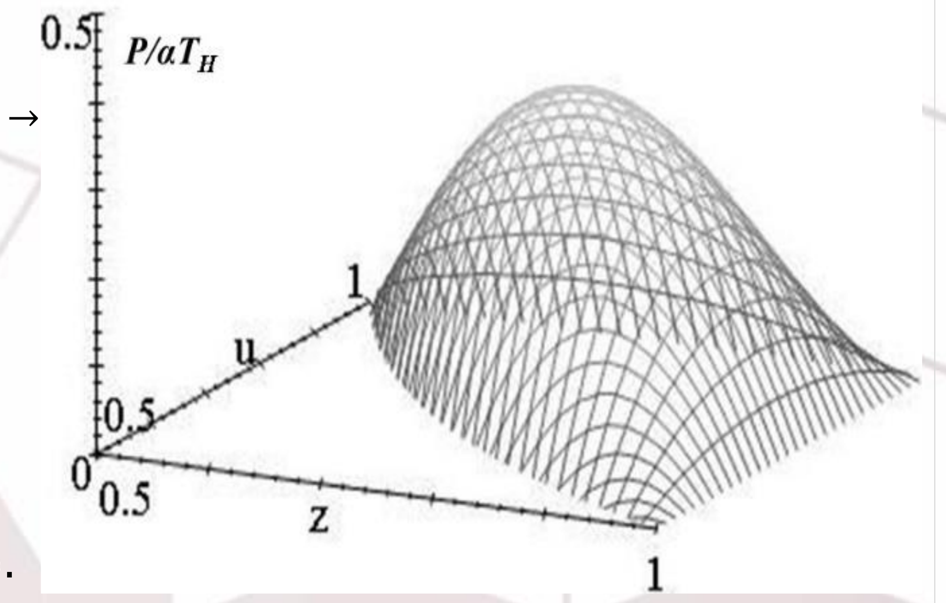
Es un ciclo teórico utilizado inicialmente para mostrar y entender la validez de la primera y la segunda ley de la termodinámica, analizando la variación de la entropía del sistema. Este ciclo esta formado por dos procesos isotérmicos conectados por un proceso adiabático y un isocórico. La condición de nulidad es que el proceso isocórico que conecta los procesos isotérmicos sea tal que el trabajo total del ciclo sea cero.

En el estudio del ciclo de Arrot, desde el punto de vista de la termodinámica de tiempos finitos, se busca considerarlo como un modelo adecuado de un sistema termodinámico con regeneración de calor residual, suficiente como para obtener una cantidad de trabajo extra, optimizando el uso de la energía suministrada al inicio del ciclo, considerando la obtención de las expresiones de potencia y eficiencia.

En la figura 1 mostramos la modificación necesaria del ciclo de Arrot, haciendo explicita la diferencia entre las temperaturas de la fuente de calor y la debida al calor residual, $T_H$ y $T_C$, respectivamente, con las temperaturas de trabajo $T_{HW}$ y $T_{CW}$ siendo $T_{HW} > T_{CW}$. Tomamos en cuenta que en el proceso isocórico el trabajo es nulo y que el proceso puede suponerse en función de las temperaturas $T_{HW}$ y $T_{CW}$. Para las temperaturas $T_C$ y $T_{CW}$ (consideradas muy cercanas), suponemos que el calor residual puede ser utilizado para producir el trabajo en el proceso de 3 a 4. La temperatura $T_H$ es la del único almacén externo de calor.

Potencia: $P \approx \alpha T_H \frac{(1-z)\left(\frac{C_V}{R}(z-1)+\ln r_e\right)(\varepsilon-zu)(1-u)R}{(\varepsilon-zu)R\ln r_e - z\left[\ln r_e + C_V\frac{(z-1)}{R}\right](1-u)R + K_V\alpha T_H(\varepsilon-zu)(1-u)(1-z)} \rightarrow$

Eficiencia: $\eta = 1 - \frac{\frac{C_V}{R}}{\ln r_e + C_V\frac{z}{R}} = 1 - \frac{1}{(\gamma-1)\ln r_e + z}$




El intervalo de existencia física de la eficiencia es (0,1), pero su región de existencia física real depende del tipo de substancia considerada, y será un Subintervalo de (0,1). La potencia del ciclo tiene valores posibles para las variables $u$ y $z$ en la región $(0,1)\times(0,1)$.

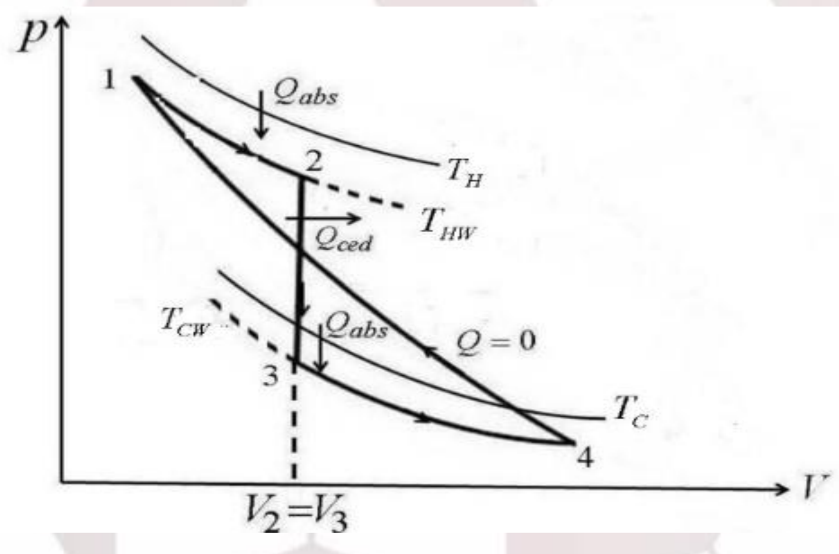



**Figura 1.** Ciclo de Arrot modificado en el plano (V,p).

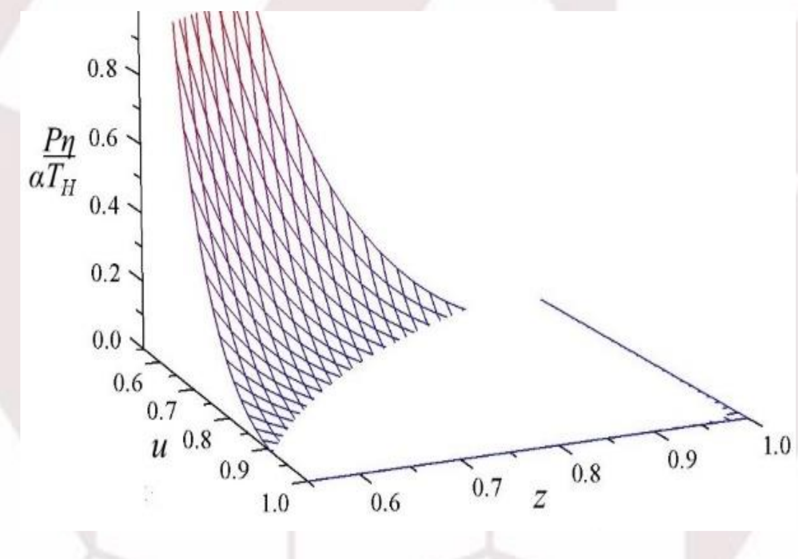



**Figura 2.** Comportamiento de la potencia eficiente en su región de existencia física.

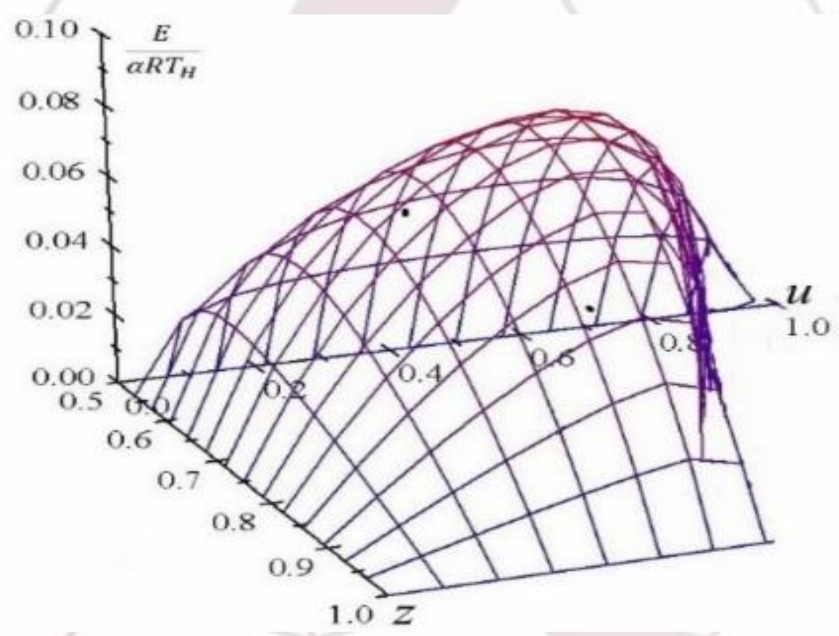



**Figura 3**. Vista del comportamiento de la función ecológica en su región de existencia física real, $0<u<1$, $\varepsilon<z<1$.

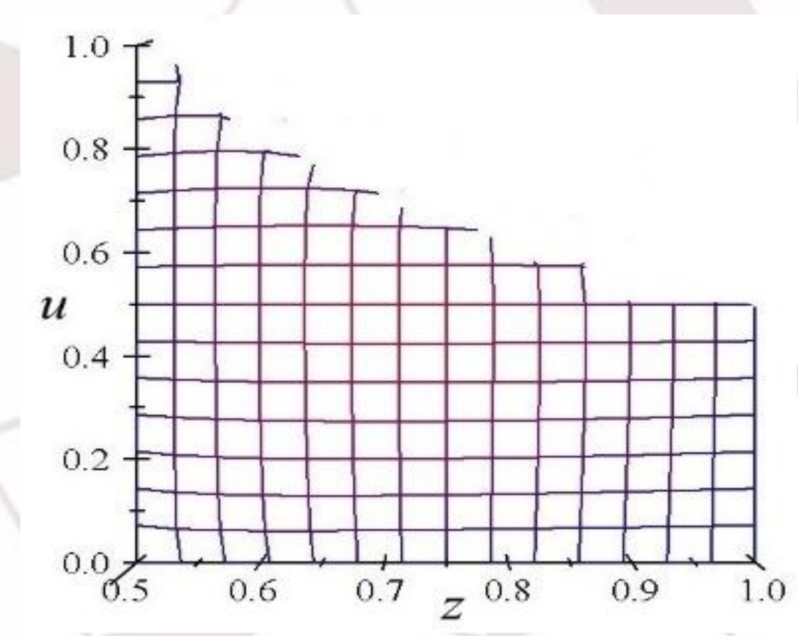



**Figura 4**. Vista de la región del plano $(u,z)$ de existencia física de la función ecológica, con $0<u<1$, $\varepsilon<z<1$

## RESULTADOS

Potencia eficiente: $P_\eta \approx \alpha T_H \frac{(1-z)\left(\frac{C_V}{R}(z-1)+\ln r_e\right)(\varepsilon-zu)(1-u)R\left[1-\frac{1}{(\gamma-1)\ln r_e+z}\right]}{(\varepsilon-zu)R\ln r_e - z\left[\ln r_e + C_V\frac{(z-1)}{R}\right](1-u)R + K_V\alpha T_H(\varepsilon-zu)(1-u)(1-z)}$

Para observar la forma que tendrá esta superficie en las variables $u$ y $z$ conviene graficar la función $\frac{P_\eta}{\alpha T_H}$, de manera que puedan ser observadas las dificultades que aparecen al tomar en cuenta la región de existencia física, sin fijarnos en sus valores numéricos. La Fig. 2 nos muestra una sub-región en la cual los valores son muy grandes, y posteriormente decaen a cero, a medida que los valores de las variables se acercan a su valor limite superior, el valor 1.

Función ecológica: $E = \alpha T_H R \frac{(1-u)(\varepsilon-uz)\left[(1+\varepsilon)\ln(r_e)+\frac{C_V}{R}(z-1)\left(\frac{u-\varepsilon}{u}\right)\right]}{R(\varepsilon-uz)\ln(r_e) - zR\left[\ln(r_e)+\frac{C_V}{R}(z-1)\right](1-u) + \alpha T_H K_V(\varepsilon-uz)(1-u)(1-z)}$

Para hallar las regiones de existencia física de la función ecológica utilizamos la condición $E(u,z)=0$ y las condiciones de extremo son $z=0$ y $z=1$, estas nos dan los valores extremos de la razón de expansión, y obtenemos que

$$z = \frac{R}{C_V}\left(\frac{u}{\varepsilon-u}\right)(1+\varepsilon)\ln(r_e)+1$$

Para $z=0$ tenemos que $r_e = \exp\left[\frac{C_V(u-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(R\cdot u)}\right]$ y para $z=1$ obtenemos $r_e=1$

Las consideraciones hechas previamente conciernen al caso de potencia nula, por lo que no son totalmente aplicables al modelo. Pero a partir de la expresión obtenida, y con las mismas consideraciones en los parámetros medibles en [6], se obtiene la forma que adquiere la función ecológica, considerándola como potencia efectiva, para las variables $u$ y $z$, tomando valores de los parámetros medibles involucrados, así como de la razón de expansión, lo que se muestra a continuación, en las Fig. 3 y Fig. 4.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos nos indican que es posible describir el comportamiento de una maquina térmica, o bien, de un sistema termodinámico en general, tomando en cuenta el calor residual que puede utilizarse para sobrecalentar la substancia de trabajo, o para obtener un trabajo extra. Para esto es importe observar gráficamente las regiones de existencia física, pues de ellas se puede obtener un adecuado estudio del desempeño del sistema con calor residual.

El desarrollo del presente Proyecto nos ha permitido entender el problema de cómo utilizar el calor residual, cuya existencia se advirtió desde la invención de las primeras máquinas de vapor. Resulta de gran valor poder entender las dificultades y problemáticas que tienen los ciclos de Carnot y de Rankine, así como sus modos de operación, ya que de otra manera tal vez no sería posible el presente estudio. Un aspecto importante que es necesario señalar es el de la poca información sobre este problema, por lo que se puede abordar un nuevo tema de investigación que puede llevar a obtener resultados interesantes.

Nos resulta de gran ayuda graficar las regiones de existencia física, ya que de estas se observa cómo pueden escogerse adecuadamente las variables de desempeño de cualquier maquina real.

## REFERENCIAS

[1] M.D. Burghardt; *Ingeniería Termodinámica*, Caps. 15-17. HARLA, México (1984).

[2] G.J. Van Wylen, R.E. Sontag; *Fundamentos de termodinámica*, Caps. 6-9. LIMUSA, México (1986).

[3] K. Wark; *Termodinámica*, Caps. 16,17,19. Mc Graw-Hill, México (1985).

[4] A.S. Arrot; The zilch cycle: An application of the first law of thermodynamics. Am. J. Phys. 45 (7), 672-673 (1977).

[5] P.M.Binder, C.K.S. Tanoue; Variations on the zilch cycle. Phys. Teach., 51, 434-436 (2013).