

Sobre la ecuación de calor de Fourier y un modelo de conducción térmica en la piel humana.

C. Nicolás-Hernández¹, A.M. Ares de Parga-Regalado², F. Angulo-Brown¹

¹Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México

Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55017 Fax (55) 5729-55015 E-mail: angulo@esfm.ipn.mx

²Departamento de Matemáticas e Ingeniería, FES-ACATLAN-UNAM, Estado de México., México

Teléfono (55) 30209492 E-mail: 876686@pcpuma.acatlan.unam.mx

Resumen — En el presente trabajo se estudia un modelo simple unidimensional y no estacionario del comportamiento de la temperatura en las capas de la piel humana al entrar en contacto con un material externo. Basándonos en artículos recientes, en donde se muestra que la efusividad térmica tiene un papel importante para la descripción física del sistema, en este estudio se extiende una condición inicial para la temperatura del material externo. De forma general, se muestra el efecto de la modificación en la temperatura de contacto y se hace una descripción de cómo es que se debe tener una congruencia física y matemática al tratar de modificar las condiciones iniciales, condiciones de frontera y las condiciones coincidentes en la interfaz correspondiente.

INTRODUCCIÓN

La efusividad térmica o también conocida como el coeficiente de contacto, juega un papel muy importante al tratar de explicar por qué al tocar dos materiales distintos con la misma temperatura, se tiene la sensación de que uno está más caliente que otro [1, 2]. La efusividad térmica de un material se entiende como la capacidad que tiene dicho material para intercambiar energía térmica con el exterior y está definida como [3]

$$\varepsilon = \sqrt{k\rho c} = \frac{k}{\sqrt{\alpha}}. \quad (1)$$

donde k es la conductividad térmica, ρ la densidad de masa, c el calor específico y α la difusividad térmica. Cuando se ponen en contacto térmico de forma ideal dos materiales semi-infinitos con temperaturas T_1 y T_2 ($T_1 > T_2$) por un periodo de tiempo suficientemente pequeño, la superficie de contacto (la interfaz) adquiere una temperatura de contacto T_c dada por [1]

$$T_c = \frac{\varepsilon_1 T_1 + \varepsilon_2 T_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad (2)$$

con ε_1 y ε_2 las efusividades de los materiales considerados. Para entender y obtener la ecuación (2) se utilizará el estudio hecho por S. Oss en [2], el cual consiste en un modelo unidimensional y no estacionario que describe de forma simple, el comportamiento de la temperatura cuando una parte del cuerpo humano entra en contacto con un material a una temperatura dada. Para ello, en dicho estudio, el tejido correspondiente a la piel humana se divide en tres capas principales: la epidermis, la dermis y la hipodermis [2, 4]. La primera es la que está expuesta con el medio ambiente, la segunda es la capa de en medio, mientras que la hipodermis se encuentra en contacto directo con el flujo de sangre. En el estudio se propone una descripción de una sola capa de la piel humana en donde la dermis queda entre la hipodermis y la epidermis la cual juega solo un papel de interfaz con el material externo. En el esquema de la Fig 1, se muestra el modelo utilizado en [2], en donde la capa de la dermis con grosor de $1mm$ tiene calor específico, densidad y conductividad térmica constantes y se denotan por c_S, ρ_S y k_S respectivamente. La epidermis con grosor de $0.1mm$, se representa por la línea roja vertical ($L = 1.1mm$) y es la que separa la dermis del material externo al cual le corresponden los parámetros constantes c_M, ρ_M y k_M .

MODELO DE OSS

De acuerdo con lo escrito en la sección anterior, en la misma Fig 1, se muestra también el estado inicial ($t = 0$) de las temperaturas involucradas en donde la temperatura de la hipodermis T_B corresponde a la temperatura constante de la sangre, T_{S0} la temperatura inicial externa de la epidermis en $x = L$, mientras que la temperatura inicial del material externo se denota por T_{M0} ($x \geq L$) [2].

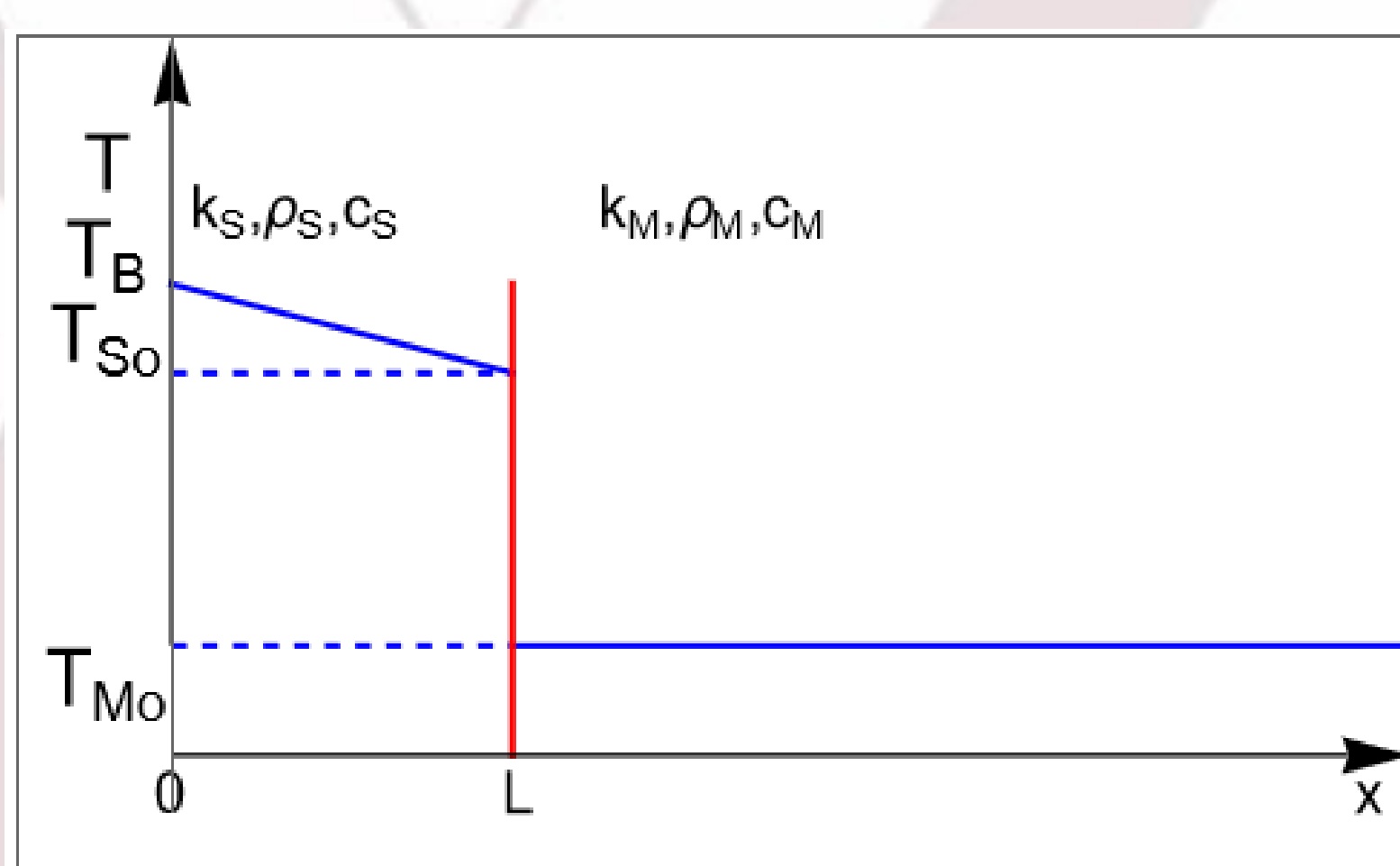


Fig. 1. Estado inicial de las temperaturas del modelo [2].

La recta en azul con pendiente negativa muestra la funcionalidad lineal inicial con respecto a x de la temperatura de la dermis $T_S^{(i)}(x)$, la cual está dada por [2]

$$T_S^{(i)}(x) = T_B + (T_{S0} - T_B) \frac{x}{L}. \quad (3)$$

Por otro lado, la recta horizontal del lado derecho (material externo) indica que el material en $t = 0$ se mantiene a una temperatura constante T_{M0} . El problema matemático consiste en encontrar soluciones para el sistema de ecuaciones diferenciales de Fourier [2, 5]

$$\frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_S} \frac{\partial T_S}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 T_M}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_M} \frac{\partial T_M}{\partial t}, \quad (4)$$

sujetas a las siguientes condiciones:

a) Condiciones de frontera

$$\begin{cases} T_S(x=0, t) = T_B, & t \geq 0 \\ T_M(x \rightarrow \infty, t) = T_{M0}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

a) Condiciones iniciales

$$\begin{cases} T_S(x, t=0) = T_S^{(i)}, & 0 \leq x \leq L \\ T_M(x, t=0) = T_{M0}, & x \geq L \end{cases} \quad (6)$$

a) Condiciones coincidentes

$$\begin{cases} T_S(x=L, t) = T_M(x=L, t), & t \geq 0 \\ k_S \left(\frac{\partial T_S}{\partial x} \right)_{x=L} = k_M \left(\frac{\partial T_M}{\partial x} \right)_{x=L}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (7)$$

De tal forma que los subíndices S y M indican las cantidades correspondiente a la dermis (piel) y al cuerpo externo.

Al analizar el estudio hecho en [2], de forma natural, se piensa en una extensión del trabajo al modificar las condiciones de frontera, iniciales y aquellas impuestas en la interfaz. Sin embargo, para hacer estos cambios se debe cuidar siempre la consistencia física y matemática del sistema. Para ilustrar esto, dentro del artículo se hace un análisis riguroso.

MODIFICACIÓN DEL MODELO DE OSS

Bajo el orden de ideas de la sección II, en este estudio se propone que la condición inicial para T_M dada en (6), sea tal que T_{M0} cambie por

$$T_M^{(i)}(x) = T_{M0}(1 + \beta e^{-x/L}). \quad (8)$$

El parámetro $\beta \geq 0$ debe ser pequeño y se debe elegir para que se cumpla que $T_{M0}' < T_{S0}$ con

$$T_M^{(i)}(x=L) = T_{M0}' = T_{M0}(1 + \beta e^{-1}). \quad (9)$$

Para entender la modificación dada en (8) se presenta en la Fig. 2, el estado inicial de las temperaturas con el nuevo término. Esta nueva propuesta se entiende como que la temperatura del material decrece de forma suave conforme $L \leq x$ crece. Se puede justificar argumentando que es un comportamiento que se encontró en el laboratorio, aunque debemos ser consistentes con el sistema de ecuaciones y las condiciones que se deben cumplir. Nuevamente lo anterior se muestra en el artículo de forma explícita. Con base en lo explicado, este trabajo consiste en encontrar la temperatura de contacto dentro de un caso límite correspondiente al cambio propuesto en (8), de acuerdo con el sistema de ecuaciones (4), cumpliendo con (5), (6) y (7).

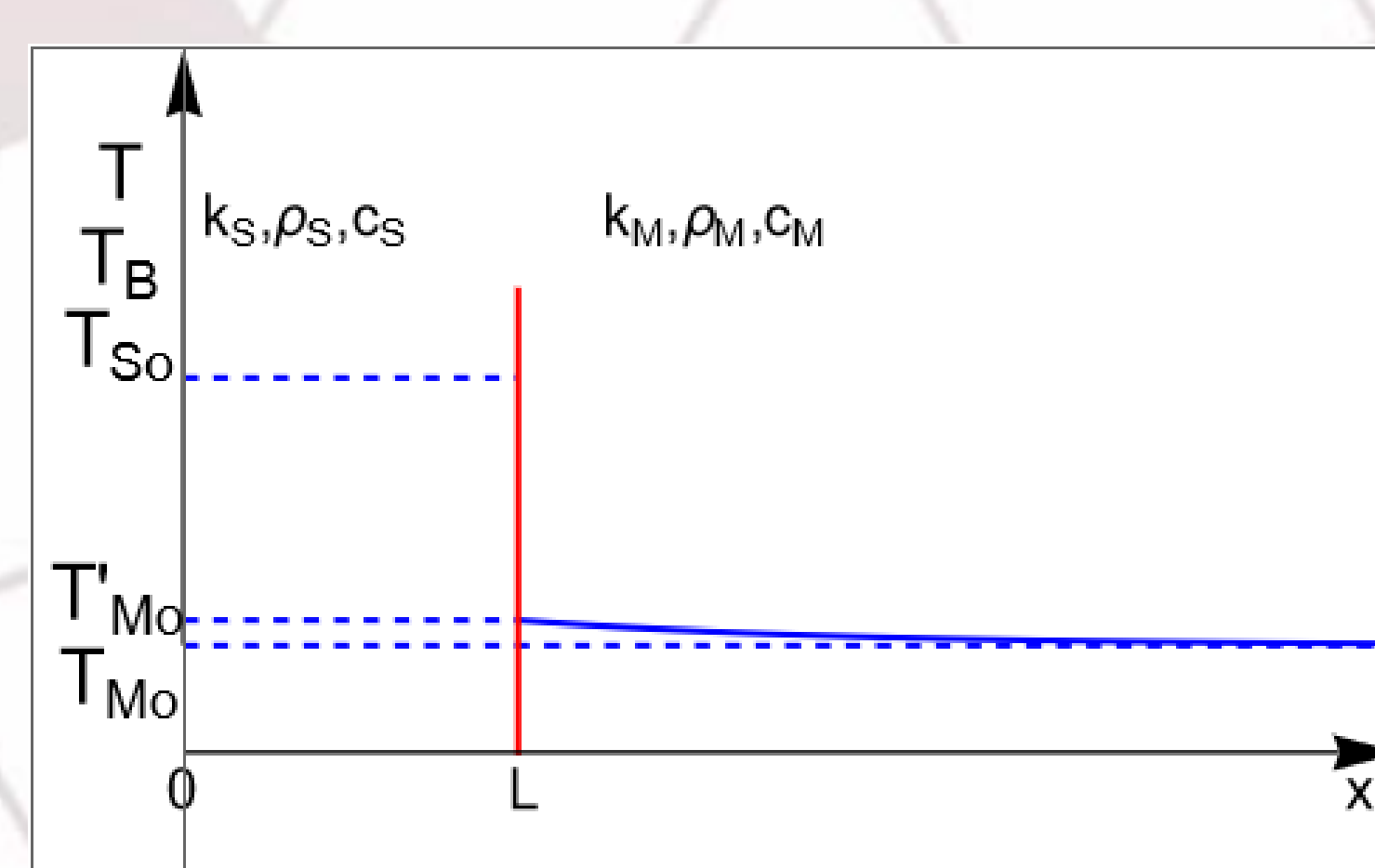


Fig. 2. Estado inicial de las temperaturas del modelo con la modificación apropiada.

RESULTADOS

Para que la propuesta dada en (8) sea consistente con el modelo, asumiremos que $t \ll \tau_M = \frac{L^2}{\alpha_M}$ en donde τ_M es el tiempo característico correspondiente a la capa del material externo. Algo similar se supuso en [2], en donde se encuentran unas expresiones particulares para la temperatura de contacto dentro del límite $t \ll \tau_S = \frac{L^2}{\alpha_S}$ en donde τ_S es el tiempo característico correspondiente a la capa de la piel. A partir de ahora, se asumirá que

$$t \ll \min(\tau_M, \tau_S). \quad (10)$$

De forma análoga a lo hecho en [2], a partir de la transformada de Laplace se encuentra que la temperatura de contacto la cual corresponde a

$$T_c(t) = T_S(x=L, t) = T_M(x=L, t). \quad (11)$$

está dada por

$$T_c(t) = \left(\frac{2e_s}{e_M + e_s} \right) \left(\frac{T_B - T_{S0}}{L} \right) \sqrt{\frac{\alpha_S t}{\pi}} + \frac{e_M T_{M0}' + e_S T_{S0}}{(e_M + e_s)}. \quad (12)$$

La expresión anterior es la expresión análoga a la encontrada por Oss (Ver Ec. 11 de [2]). La diferencia radica en que, con nuestra modificación, bajo la aproximación (10), en lugar de que en (12) aparezca T_{M0} , se encuentra la dependencia en T_{M0}' . Con lo cual, al ver (9), si $\beta = 0$ se recupera lo obtenido por Oss. En realidad, al fijar un valor para β que dependerá del material, lo obtenido en (12) en este trabajo, es un resultado equivalente al dado en [2]. De hecho, es claro que cuando $t \rightarrow 0$, la ecuación (43) se convierte en

$$T_c(t) \approx \frac{e_M T_{M0}' + e_S T_{S0}}{(e_M + e_s)} \approx \frac{e_M T_{M0}(1 + \beta e^{-1}) + e_S T_{S0}}{(e_M + e_s)}. \quad (13)$$

La ecuación anterior representa precisamente lo planteado cuando se presento la ecuación (2). Tal y como se menciona en [2], se ve claramente que la temperatura de contacto a tiempos muy cortos no solamente depende de las temperaturas de los cuerpos que divide la interfaz, si no también dependen de las efusividades. De este modelo tan simple se puede concluir, por ejemplo, que esto tiene posibles aplicaciones directas en el diseño de telas para cuidados de quemaduras de la piel [2].

CONCLUSIONES

En este trabajo se expuso, añadiendo una modificación simple, la forma de obtener la temperatura de contacto de acuerdo con el modelo presentado por Oss para tiempos menores a los tiempos característicos de la piel y el material. Dada esta modificación se encuentra que, en términos generales, no afecta la funcionalidad de la temperatura de contacto. Sin embargo, en este trabajo solo se mostraron las soluciones para $x = L$, y con todo lo hecho se puede obtener las soluciones generales, bajo el límite considerado, para las temperaturas tanto de la piel y el material en función de x . Esto se está trabajando actualmente y es muy probable, que se vean las diferencias. Todo lo anterior se está analizando a detalle, ya que en un trabajo futuro se busca generalizar el modelo a un modelo de dos dimensiones.

REFERENCIAS

1. E. Marín, "Thermal Physics Concepts: The Role of the Thermal Effusivity", The Physics Teacher 44, 432-434 (2006)
2. S. Oss, "A simple model of thermal conduction in human skin: temperature perception and thermal effusivity", Eur. J. Phys. 43, 03, 5101 (2022)
3. H.S. Carslaw and J.C. Jaeger, "Conduction of Heat in Solids", Oxford University Press, London, (1959)
4. M. Strakowska, G. de Mey, B. Wiecek and M. Strzelecki, "A three layer model for the thermal impedance of the human skin: modeling and experimental measurements", J. Mech. Med. Biol 15, 0219-5194 (2015)
5. J.H. Lienhard IV and J.H. Lienhard V, "A heat Transfer Textbook", 5th edn Dover, New York (2019)
6. M. Braun, "Differential equations and their applications", 4th edn Springer, New York (2013)