Relación entre los coeficientes de Fourier y la Transformada Discreta de Fourier

Díaz Leal Merino Luis Andrés.
Ecatepec de Morelos, Estado de México, México. Teléfono: (56) 3105 0121.
andy-dlm@ciencias.unam.mx

RESUMEN/ABSTRACT

Este artículo muestra que la Transformada Discreta de Fourier puede usarse como un método numérico para aproximar los coeficientes de Fourier de una función. Se estudian tres clases de funciones: funciones de banda limitada, funciones continuas (suaves a pedazos) y funciones suaves a pedazos (no necesariamente continuas). Estos resultados se muestran gráficamente mediante algunos ejemplos.

This article shows that the Discrete Fourier Transform can be used as a numerical tool for aproximating the Fourier coefficients of a function. The results are shown in three classes of functions: band-limited functions, continuous functions (piecewise smooth) and piecewise smooth functions (not necesarily continuous). Graphical examples of these results are given.

INTRODUCCIÓN

Sea $x \in C^N$ un vector. La **Transformada Discreta de Fourier** de x es el vector $F\{x\}$ cuya n-ésima componente está definida de la siguiente forma:

$$F_n\{x\} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \omega^{kn}$$

donde:

$$\omega = e^{2\pi i/N}$$

Sea $f: R \to C$ es una función 2π-periódica. Su ***k*-ésimo coeficiente de Fourier** está definido por:

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$$

La regla del trapecio implica lo siguiente:

$$c_{-n}(f) \approx \frac{1}{N}F_n\{x\} \qquad (1)$$

En este artículo se estudia la precisión de esta relación. Las funciones de interés son las siguientes.

La función f es de banda limitada si puede expresarse de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{k=-M+1}^{M} c_k(f)e^{ikx} \qquad (2)$$

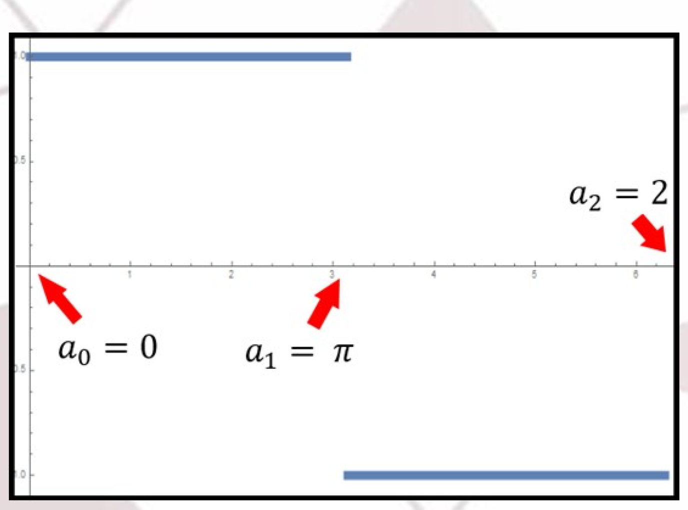
Como ejemplo, la siguiente función es de banda limitada:

$$sen(500x) = \frac{i}{2}\left(e^{500ix} - e^{-500ix}\right)$$

La función f es suave a pedazos en $[0,2\pi]$, si cumple las siguientes condiciones:

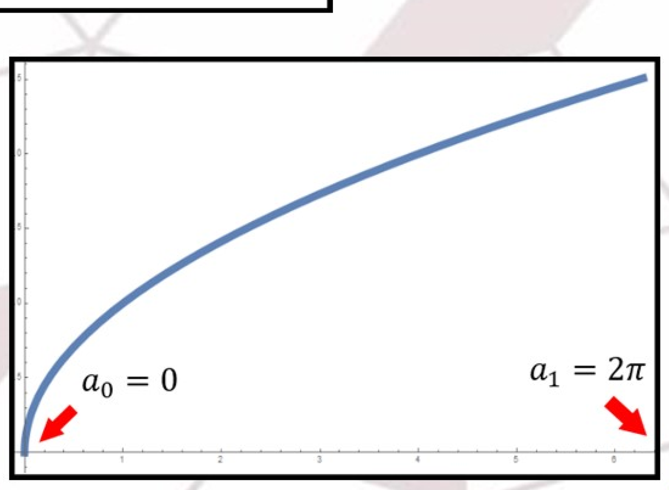
1. Es acotada.
2. Existe una partición $a_0 = 0 < \ldots < a_n = 2\pi$, tal que f es derivable con continuidad en (a_k, a_{k+1}) para $k = 0, \ldots, n-1$.
3. La función f' es integrable en $[0,2\pi]$

Los siguientes son algunos ejemplos de funciones suaves a pedazos:



Esta función es acotada y es derivable con continuidad en los intervalos (a_0, a_1) y (a_1, a_2). Por lo tanto es suave a pedazos.

La función $f(x) = \sqrt{x}$ es acotada y es derivable con continuidad en el intervalo (a_0, a_1). Por lo tanto es suave a pedazos.



RESULTADOS

Sea $f: R \to C$ una función 2π-periódica. Se define:

$$x_k = f(2\pi k/N)$$

Para verificar la precisión de (1), se definen las siguientes funciones:

$$H_n\{x\} = \frac{1}{N}|F_{-n}\{x\}|$$

$$K_n\{x\} = |c_n(f)|$$

La relación (1) implica que la gráfica de H_n se parece cada vez más a la gráfica de K_n si N crece. Los teoremas a continuación dan una idea de la rapidez con lo que esto sucede.

Para comprobar los resultados en el artículo, se van a comparar estas cantidades. El primer teorema se aplica a funciones de banda limitada. Si f es como en (2), entonces:

$$\frac{1}{N}F_n\{x\} = c_{-n}(f)$$

donde y $-\frac{N}{2} \le n < \frac{N}{2}$, siempre que $N \ge 2M$.

Para las funciones continuas (en todo R) y suaves a pedazos, se demuestra que:

$$\left|\frac{1}{N}F_n\{x\} - c_{-n}(f)\right| \le \frac{A}{N^2}$$

para algún número A y $-\frac{N}{2} \le n < \frac{N}{2}$. Ver la figura 1 para una comparación entre H y K con la función:

$$f(x) = x1_{[0,\pi)} + (-x + 2\pi)1_{[\pi,2\pi)}$$

donde 1_X es la función característica del conjunto X.

Finalmente, para funciones suaves a pedazos, en el artículo se prueba que:

$$\left|\frac{1}{N}F_n\{x\} - c_{-n}(f)\right| \le \frac{A}{N}$$

para algún número A y $-\frac{N}{2} \le n < \frac{N}{2}$. Obsérvese la excelente precisión con la que H aproxima a la función K en la figura 2, aun cuando la función que se utilizó:

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad (3)$$

es discontinua.

CONCLUSIONES

- Los ejemplos anteriores muestran que la DFT es un excelente método de aproximación numérico. Una sola DFT puede aproximar una gran cantidad de coeficientes de Fourier con mucha precisión.
- En el artículo se discute el concepto de variación acotada, que permite debilitar la hipótesis de suavidad a pedazos.

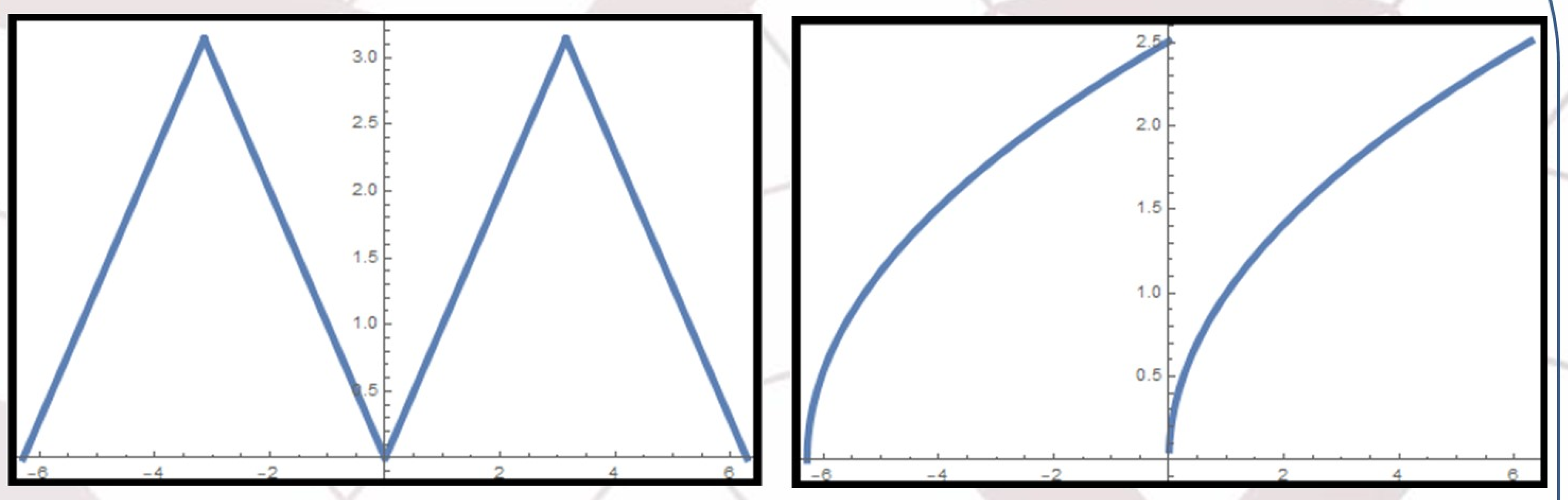


Figura 1. A la izquierda una función suave a pedazos y continua. A la derecha, una función suave a pedazos.

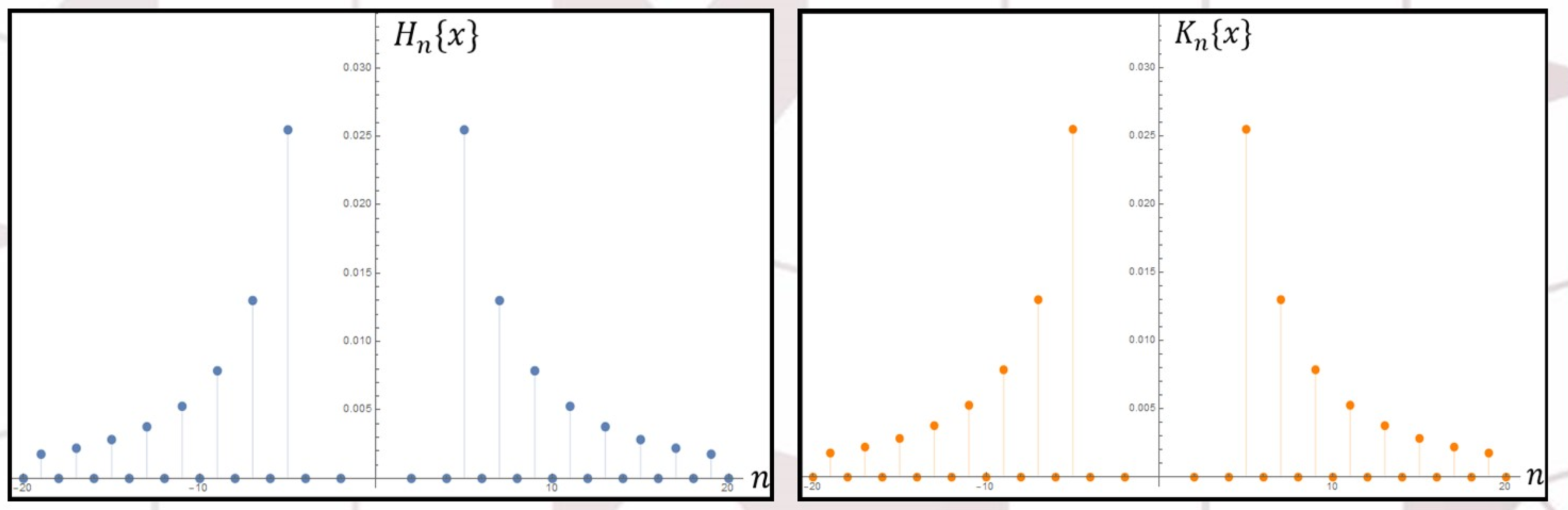


Figura 2. A la izquierda se muestran los valores de H_n y a la derecha los de K_n, para la función del lado izquierdo en la figura 1. Se utilizó $N = 500$.

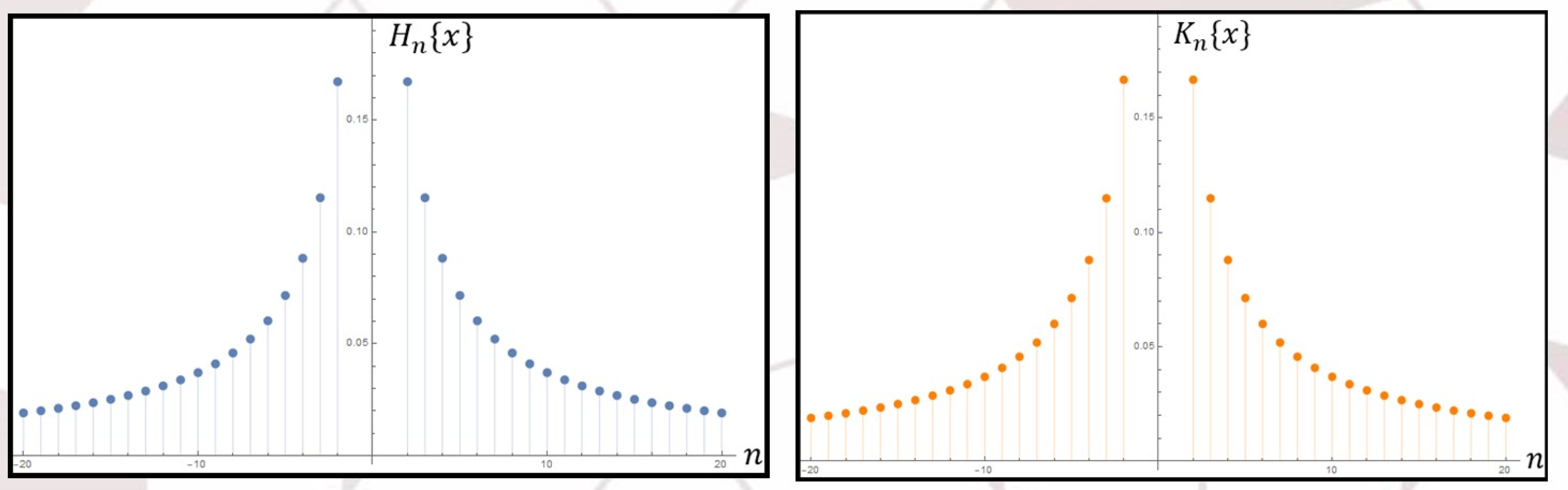


Figura 3. A la izquierda se muestran los valores de H_n y a la derecha los de K_n, para la función del lado derecho en la figura 1. Se utilizó $N = 500$.

REFERENICAS

1. [W. L. Briggs and Van Endem Henson (1995). "*The DFT: an owner's manual for the discrete Fourier transform*". Philadephia USA, Society for Industrial and Applied Mathematics.
2. H. S. Carslaw (1930). "*Introduction to the theory of Fourier series and integrals*". Third edition, Dover Publications, Inc.
3. Van Emden Henson (1990). "*Fourier methods of image reconstruction*". Ph.D. dissertation at University of Colorado.
4. Y. Katznelson (2004). "*An introduction to harmonic analysis*". Third edition, Cambridge University Press.
5. M. Taibleson (1967). "*Fourier coefficients of functions of bounded variation*". Proc. Amer. Math. Soc. 18, 766.
6. H. L. Royden and P. M. Fitzpatrick (2010). "*Real analysis*". Fourth edition, China Machine Press.
7. W. Rudin (1988). "*Análisis Real y Complejo*". Third edition, México. McGraw Hill.