Cálculo de las frecuencias cuasi-normales del campo de Dirac en un agujero negro asintóticamente anti-de Sitter

Miguel Ángel García Platero[1], A. López-Ortega[1].

[1]Departamento de Física, ESFM-Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México., México., Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55040 Fax (55) 5729-55015

angelwge@hotmail.com, alopezo@ipn.mx.

ESFM

Instituto Politécnico Nacional

RESUMEN/ABSTRACT

Calculamos numéricamente las frecuencias cuasinormales del campo de Dirac que se propaga en un agujero negro bidimensional asintóticamente anti-de Sitter de la teoría de la gravedad con dilatón. Para realizar el cálculo, utilizamos el método de iteración asintótica para sistemas acoplados de ecuaciones diferenciales de primer orden y una versión mejorada del método anterior.

Introducción

Cuando un agujero negro es perturbado, la geometría que lo rodea experimenta oscilaciones amortiguadas. Las frecuencias y los tiempos de amortiguamiento de estas oscilaciones son características del agujero negro y son independientes de la perturbación inicial. Estas oscilaciones son similares a los modos normales de un sistema cerrado. Sin embargo, dado que el campo puede caer en el agujero negro o irradiarse al infinito, los modos decaen y las frecuencias correspondientes son complejas. Estas oscilaciones se conocen como "modos cuasi-normales" [1]. Así, los modos cuasi-normales son las oscilaciones de los agujeros negros perturbados que son puramente entrantes cerca del horizonte. La condición de frontera impuesta en la región asintótica depende de su estructura, por ejemplo, para los agujeros negros asintóticamente planos, la condición de frontera generalmente impuesta es que la perturbación es puramente saliente cuando r → ∞, mientras que para los agujeros negros asintóticamente anti-de Sitter, una condición de frontera común exige que la perturbación llegue a cero cuando r → ∞. Asociado a los modos cuasi-normales encontramos un conjunto de frecuencias complejas llamadas frecuencias cuasi-normales. Es bien sabido que las frecuencias cuasi-normales de los agujeros negros están determinadas por la geometría y el tipo de perturbación [2].

Existen diversos trabajos en los que se han calculado las frecuencias cuasi-normales de hoyos negros empleando el método de iteración asintótica (AIM) para ecuaciones diferenciales de segundo orden, así como una versión mejorada del mismo [3]. En este trabajo, haremos uso del método de iteración asintótica para un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden [2], [4] y una versión mejorada del mismo [2].

Metodología

Descripción del método

Existen sistemas físicos en la naturaleza modelados por ecuaciones diferenciales acopladas cuya solución analítica es muy difícil de calcular, el método de iteración asintótica es capaz de dar soluciones numéricas a dichos sistemas. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_0(x)y_1 + s_0(x)y_2 \\ y_2' &= \mu_0(x)y_1 + p_0(x)y_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

con λ_0, μ_0, s_0 y p_0 en $C_\infty(a,b)$. Derivando la primera ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} y_1'' &= \lambda_0' y_1 + \lambda_0 y_1' + s_0' y_2 + s_0 y_2' \\ y_1'' &= \lambda_0' y_1 + \lambda_0(\lambda_0 y_1 + s_0 y_2) + s_0' y_2 + s_0(\mu_0 y_1 + p_0 y_2) \\ y_1'' &= (\lambda_0' + \lambda_0\lambda_0 + s_0\mu_0)y_1 + (s_0' + \lambda_0 s_0 + s_0 p_0)y_2 \end{aligned}$$

Haciendo

$$\lambda_1 = \lambda_0' + \lambda_0\lambda_0 + s_0\mu_0 \quad , \quad s_1 = s_0' + \lambda_0 s_0 + s_0 p_0$$

Obtenemos

$$y_1'' = \lambda_1(x)y_1 + s_1(x)y_2$$

Análogamente

$$y_2'' = \mu_1(x)y_1 + p_1(x)y_2$$

con

$$\mu_1 = \mu_0' + \lambda_0\mu_0 + p_0\mu_0 \quad , \quad p_1 = p_0' + p_0 p_0 + s_0\mu_0$$

después de n+1 derivadas

$$\begin{aligned} y_1^{(n+2)} &= \lambda_{n+1}(x)y_1 + s_{n+1}(x)y_2 \\ y_2^{(n+2)} &= \mu_{n+1}(x)y_1 + p_{n+1}(x)y_2 \end{aligned}$$

dónde

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \lambda_n' + \lambda_n\lambda_0 + s_n\mu_0 \quad , \quad s_{n+1} = s_n' + \lambda_n s_0 + s_n p_0 \\ \mu_{n+1} &= \mu_n' + \mu_n\lambda_0 + p_n\mu_0 \quad , \quad p_{n+1} = p_n' + p_n p_0 + \mu_n s_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Tomando el cociente de $y_1^{(n+2)}$ y $y_1^{(n+1)}$ podemos escribir

$$\frac{d}{dx} ln\left(y_1^{(n+1)}\right) = \frac{y_1^{(n+2)}}{y_1^{(n+1)}} = \frac{\lambda_{n+1}\left(y_1 + \frac{s_{n+1}}{\lambda_{n+1}} y_2\right)}{\lambda_n\left(y_1 + \frac{s_n}{\lambda_n} y_2\right)}.$$

si para algún $n > 0$ lo suficientemente grande se cumple que

$$\frac{s_{n+1}}{\lambda_{n+1}} = \frac{s_n}{\lambda_n} = \alpha$$

o equivalentemente

$$\delta_n = s_n\lambda_{n-1} - s_{n-1}\lambda_n = 0 \qquad (3)$$

que es conocida como "condición de discretización". Finalmente, llegamos a

$$y_2(x) = exp\left(\int^x (p_0 - \alpha\mu_0)dt\right)\left[C_2 + C_1\int^x \mu_0 exp\left(\int^t (\lambda_0 - p_0 + 2\alpha\mu_0)d\tau\right)dt\right]$$

una vez obtenida $y_2(x)$ es fácil obtener $y_1(x)$.

Método mejorado

Una característica poco atractiva de las relaciones de recurrencia (2) es que en cada iteración se debe tomar la derivada de λ, s, μ y p de la iteración anterior. Esto puede ralentizar la implementación numérica del AIM y también generar problemas con la precisión numérica. Para evitar estos problemas, se ha desarrollado una versión mejorada del AIM que evita la necesidad de tomar derivadas en cada paso. Esto mejora enormemente, tanto la precisión como la velocidad del método. Expandimos λ_n, s_n, μ_n y p_n en series de Taylor alrededor de un punto conveniente que llamamos ξ, esto es

$$\begin{aligned} \lambda_n(\xi) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_n^i (x-\xi)^i \\ s_n(\xi) &= \sum_{i=0}^{\infty} d_n^i (x-\xi)^i \\ \mu_n(\xi) &= \sum_{i=0}^{\infty} e_n^i (x-\xi)^i \\ p_n(\xi) &= \sum_{i=0}^{\infty} f_n^i (x-\xi)^i . \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2) tenemos que los coeficientes c_n^i, d_n^i, e_n^i y f_n^y satisfacen las relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} c_n^i &= (i+1)c_{n-1}^{i+1} + \sum_{k=0}^{i}\left(c_0^k c_{n-1}^{i-k} + e_0^k d_{n-1}^{i-k}\right) \\ d_n^i &= (i+1)d_{n-1}^{i+1} + \sum_{k=0}^{i}\left(d_0^k c_{n-1}^{i-k} + f_0^k d_{n-1}^{i-k}\right) \\ e_n^i &= (i+1)e_{n-1}^{i+1} + \sum_{k=0}^{i}\left(c_0^k e_{n-1}^{i-k} + e_0^k f_{n-1}^{i-k}\right) \\ f_n^i &= (i+1)f_{n-1}^{i+1} + \sum_{k=0}^{i}\left(d_0^k e_{n-1}^{i-k} + f_0^k f_{n-1}^{i-k}\right). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la "condición de discretización" (3) obtenemos que esta ahora toma la forma

$$\Delta_n = d_n^0 c_{n-1}^0 - d_{n-1}^0 c_n^0 = 0 \qquad (4)$$

En el caso del método mejorado, de esta ecuación obtenemos los valores de las frecuencias cuasinormales.

Ecuación del campo de Dirac en un agujero negro bidimensional asintóticamente anti-de Sitter

En este trabajo estudiamos un agujero negro asintóticamente anti-de Sitter cuya métrica está dada por

$$ds^2 = \left(a^2r^2 - \frac{1}{ar}\right)dt^2 - \left(a^2r^2 - \frac{1}{ar}\right)^{-1} dr^2 \qquad (5)$$

y que es solución a la ecuación de movimiento para la acción

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d^2x\sqrt{-g}e^{-2\phi}[\mathcal{R} - 4\rho(\partial\phi)^2 + 4\sigma^2]$$

donde $\mathcal{R}$ es el escalar de curvatura, σ es una constante que interpretamos como constante cosmológica, ϕ es el dilatón, ρ es un parámetro que tomamos como $\rho = -1/2$ y el campo dilatónico es igual a $e^{-2\phi} = a^2r^2$ [5].

En este agujero negro la ecuación de Dirac se simplifica a un par de ecuaciones tipo Schrödinger de la forma [2]

$$\frac{d^2R_l}{dr_*^2} + \omega^2 R_l = V_l R_l$$

donde $l = 1, 2$, los potenciales efectivos son iguales a

$$V_l = m^2 f \mp \frac{i\omega}{2}\frac{df}{dr} - \frac{f}{4}\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{16}\left(\frac{df}{dr}\right)^2$$

y hemos usado la convención que el signo superior (inferior) corresponde a $l = 1$ ($l = 2$) y

$$f = a^2r^2 - \frac{1}{ar}$$

De acuerdo con [2], para una métrica de la forma

$$ds^2 = P^2dt^2 - Q^2dr^2$$

la ecuación de Dirac toma la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\frac{1}{Q}\frac{dR_2}{dr} + \frac{i\omega}{P}R_2 + \frac{1}{2PQ}\frac{dP}{dr}R_2 = imR_1$$

$$\frac{1}{Q}\frac{dR_1}{dr} - \frac{i\omega}{P}R_1 + \frac{1}{2PQ}\frac{dP}{dr}R_1 = -imR_2$$

Tomando las funciones radiales R_l en la forma

$$\begin{aligned} R_1 &= (r-r_+)^{-\frac{i\omega}{2\kappa}} r^{-\frac{m}{2}+\frac{i\omega}{2\kappa}} \frac{(r-r_+)^{\frac{1}{4}}}{r^{\frac{3}{4}}} V_1 \\ R_2 &= (r-r_+)^{-\frac{i\omega}{2\kappa}} r^{-\frac{m}{2}+\frac{i\omega}{2\kappa}} \frac{V_2}{(r-r_+)^{1/4} r^{1/4}} \end{aligned}$$

se llega a que las funciones V_1 y V_2 son soluciones de las ecuaciones diferenciales acopladas

$$\frac{dV_1}{dz} = \left(\frac{-i\omega r_+}{1-z^3} + \frac{2+z^3}{4(1-z^3)z} + \frac{\frac{1}{4}-\frac{i\omega}{2\kappa}}{z(1-z)} + \frac{\frac{i\omega}{2\kappa}-\frac{m}{2}-\frac{3}{4}}{z}\right)V_1 + \frac{imr_+}{(1-z)(1+z+z^2)^{1/2}z}V_2$$

$$\frac{dV_2}{dz} = \left(\frac{i\omega r_+}{1-z^3} + \frac{2+z^3}{4(1-z^3)z} - \frac{\frac{1}{4}-\frac{i\omega}{2\kappa}}{z(1-z)} + \frac{\frac{i\omega}{2\kappa}-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}{z}\right)V_2 - \frac{imr_+}{(1+z+z^2)^{1/2}z}V_1$$

donde $z = \frac{r_+}{r}$ y $r_+ = 1/a$ es el horizonte de sucesos del agujero negro (5) [2].

Estas ecuaciones son de la forma (1) por lo que podemos identificar las funciones λ_0, μ_0, s_0 y p_0 como sigue

$$\begin{aligned} \lambda_0(z) &= -\frac{i\omega r_+}{1-z^3} + \frac{2+z^3}{4(1-z^3)z} + \frac{\frac{1}{4}-\frac{i\omega}{2\kappa}}{z(1-z)} + \frac{\frac{i\omega}{2\kappa}-\frac{m}{2}-\frac{3}{4}}{z} \\ s_0(z) &= \frac{imr_+}{(1-z)(1+z+z^2)^{1/2}z} \\ \mu_0(z) &= -\frac{imr_+}{(1+z+z^2)^{1/2}z} \\ p_0(z) &= \frac{i\omega r_+}{1-z^3} + \frac{2+z^3}{4(1-z^3)z} - \frac{\frac{1}{4}+\frac{i\omega}{2\kappa}}{z(1-z)} + \frac{\frac{i\omega}{2\kappa}-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}{z} \end{aligned}$$

Resultados

Para el campo de Dirac que se propaga en el agujero negro bidimensional (5), encontramos que, para los primeros cuatro modos, los dos métodos producen QNF que concuerdan con tres lugares decimales. Este hecho se observa en los cuadros Tabla 1 y Tabla 2 para configuraciones específicas.

TABLA 1.
PRIMERAS FRECUENCIAS CUASI-NORMALES DEL CAMPO DE DIRAC TOMANDO $r_+ = 70$ Y $m = 1/10$.

Número de modo	AIM	AIM mejorado
0	0.078-0.135i	0.078-0.135i
1	0.095-0.166i	0.095-0.166i
2	0.112-0.198i	0.112-0.198i
3	0.130-0.229i	0.130-0.229i

TABLA 2.
PRIMERAS FRECUENCIAS CUASI-NORMALES DEL CAMPO DE DIRAC TOMANDO $r_+ = 50$ Y $m = 1/10$.

Número de modo	AIM	AIM mejorado
0	0.081-0.142i	0.081-0.142i
1	0.105-0.186i	0.105-0.186i
2	0.129-0.231i	0.129-0.231i
3	0.153-0.276i	0.153-0.276i

Los valores mostrados en los cuadros Tabla 1 y Tabla 2 para el método de iteración asintótica fueron encontrados al comparar las soluciones estables de la condición de discretización (3), esto es, comparamos las raíces de (3) para 16 y 17 iteraciones, las raíces que se repitieron son consideradas como raíces estables y, por lo tanto, corresponden a las frecuencias cuasi-normales del campo de Dirac que se propaga en el agujero negro asintóticamente anti-de Sitter (5). Los valores mostrados para el AIM mejorado se obtuvieron de manera análoga, solo que en este caso se utilizó la forma de la condición de discretización dada por (4).

Ambos métodos fueron programados en Wolfram Mathematica.

CONCLUSIONES

Hasta donde pudimos observar, ambas formas del método AIM produjeron las mismas frecuencias para campo y el agujero negro estudiado. Sin embargo, el tiempo invertido en el cálculo de las frecuencias fue sustancialmente distinto entre ambas formulaciones del método; mientras que con el AIM mejorado se tardó alrededor de 3 segundos en realizar las iteraciones, el primer método tardó cerca de 20 minutos y, a más iteraciones, llegó a tardar incluso horas. La principal razón de la discrepancia en cuanto al tiempo empleado por ambos métodos radica en el hecho de que en el AIM se debe tomar la derivada de las funciones λ,s,μ y p de la iteración anterior, razón por la cual, el método se vuelve lento y poco eficiente.

En los cuadros Tabla 1 y Tabla 2 observamos que la parte imaginaria de las frecuencias cuasi-normales es negativa, por lo cual, los modos cuasi-normales decaen en el tiempo y, por lo tanto, el agujero negro es perturbativamente estable. Adicionalmente, observamos que el amortiguamiento y la frecuencia de oscilación se incrementan cuando el número de modo aumenta.

Actualmente estamos trabajando en nuestras simulaciones numéricas con la finalidad de obtener resultados para otras configuraciones de los parámetros, así como un mayor número de modos.

REFERENCIAS

[1] G. T. Horowitz y V. E. Hubeny, "Quasinormal Modes of AdS Black Holes and the Approach to Thermal Equilibrium", *Phys. Rev. D*, vol. 62, núm. 2, p. 024027, jun. 2000, doi: 10.1103/PhysRevD.62.024027.

[2] M. I. Hernández-Velázquez y A. López-Ortega, "Quasinormal Frequencies of a Two-Dimensional Asymptotically Anti-de Sitter Black Hole of the Dilaton Gravity Theory", *Front. Astron. Space Sci.*, vol. 8, p. 713422, ago. 2021, doi: 10.3389/fspas.2021.713422.

[3] H. T. Cho, A. S. Cornell, J. Doukas, T.-R. Huang, y W. Naylor, "A New Approach to Black Hole Quasinormal Modes: A Review of the Asymptotic Iteration Method", *Adv. Math. Phys.*, vol. 2012, pp. 1–42, 2012, doi: 10.1155/2012/281705.

[4] H. Ciftci, R. L. Hall, y N. Saad, "Iterative solutions to the Dirac equation", *Phys. Rev. A*, vol. 72, núm. 2, p. 022101, ago. 2005, doi: 10.1103/PhysRevA.72.022101.

[5] J. P. S. Lemos y P. M. Sá, "The Black Holes of a General Two-Dimensional Dilaton Gravity Theory", *Phys. Rev. D*, vol. 49, núm. 6, pp. 2897–2908, mar. 1994, doi: 10.1103/PhysRevD.49.2897.