



Espectro de frecuencias cuasinormales de potenciales que decaen exponencialmente

J. Jaimes-Najera^{1,a)}, A. López-Ortega^{1,b)}

¹Departamento de Física. Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional
Unidad Profesional Adolfo López Mateos. Edificio 9
Ciudad de México, México, C. P. 07738
a)jnajera333@gmail.com
b)alopez@ipn.mx



RESUMEN

Los potenciales que decaen exponencialmente tienen la característica de que su decaimiento conforme su variable independiente tiende a más o menos infinito es muy pronunciado, sean estos potenciales tipo barrera o pozo. En este trabajo calculamos numéricamente el espectro de frecuencias cuasinormales de un potencial barrera de este tipo para dos formas de su gráfica distintas, mediante dos diferentes métodos.

INTRODUCCIÓN

Físicamente, nuestro sistema se compone de radiación propagándose alrededor de un agujero negro, bien puede ser radiación electromagnética, un campo escalar o bien ondas gravitatorias, en cuyo caso lo que oscila es el espacio-tiempo mismo. Las ondas de nuestro sistema decaen por la presencia del horizonte de sucesos del agujero negro que provoca que la energía no se conserve; como bien sabemos, una vez que la materia o la radiación cruzan hacia dentro del agujero negro (el cual está delimitado por la superficie cerrada llamada horizonte de sucesos) es imposible que regresen hacia fuera. Como no se conserva la energía, el sistema es disipativo y no hay un posible tratamiento de modos normales, por lo cual se llaman modos cuasinormales [1].

MÉTODOS NUMÉRICOS

Utilizamos el Método de Iteración Asintótica (AIM por sus siglas en inglés), el cual es utilizado para encontrar la solución de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden:

$$\chi'' = \lambda_0(x)\chi' + s_0(x)\chi \quad (1)$$

donde los coeficientes $\lambda_0(x)$ y $s_0(x)$ son funciones de clase $C^\infty(a, b)$. Vamos a proceder de forma iterativa derivando (1) [2]:

$$\chi''' = \lambda_1(x)\chi' + s_1(x)\chi, \quad (2)$$

notando que (1) es simétrica, derivando se obtiene (2), una ecuación de la misma forma. Los coeficientes de están dados por

$$\lambda_1 = \lambda_0' + s_0 + (\lambda_0)^2, \quad (3)$$

$$s_1 = s_0' + s_0\lambda_0. \quad (4)$$

Derivando por segunda vez obtenemos

$$\chi^{(4)} = \lambda_2(x)\chi' + s_2(x)\chi, \quad (5)$$

con

$$\lambda_2 = \lambda_1' + s_1 + \lambda_0\lambda_1, \quad (6)$$

$$s_2 = s_1' + s_0\lambda_1. \quad (7)$$

Derivando de manera iterativa, para las derivadas $(k+1)$ y $(k+2)$, $k=1,2,\dots$, obtenemos

$$\chi^{(k+1)} = \lambda_{k-1}(x)\chi' + s_{k-1}(x)\chi, \quad (8)$$

y

$$\chi^{(k+2)} = \lambda_k(x)\chi' + s_k(x)\chi, \quad (9)$$

con los k -ésimos coeficientes λ_k y s_k dados por

$$\lambda_k(x) = \lambda_{k-1}'(x) + s_{k-1}(x) + \lambda_0(x)\lambda_{k-1}(x) \quad (10)$$

y

$$s_k(x) = s_{k-1}'(x) + s_0(x)\lambda_{k-1}(x). \quad (11)$$

Se propone que para un número suficientemente grande de iteraciones se cumplirá

$$\frac{s_k(x)}{\lambda_k(x)} = \frac{s_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)} \equiv \beta(x), \quad (12)$$

para alguna función $\beta(x)$. Los eigenvalores del problema se obtienen a partir de la "condición de discretización" siguiente:

$$\delta_k = s_k\lambda_{k-1} - s_{k-1}\lambda_k = 0, \quad (13)$$

Una versión mejorada de este método propone expandir λ_k y s_k en series de Taylor alrededor del punto x_0 en donde se realiza el AIM [3]:

$$\lambda_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_k^i (x-x_0)^i, \quad (14)$$

$$s_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_k^i (x-x_0)^i,$$

donde c_k^i y d_k^i son los i -ésimos coeficientes de λ_k y s_k , respectivamente. Sustituyendo (14) en (10) y (11) se obtiene

$$c_k^i = (i+1)c_{k-1}^{i+1} + d_{k-1}^i + \sum_{j=0}^i c_0^j c_{k-1}^{i-j}, \quad (15)$$

$$d_k^i = (i+1)d_{k-1}^{i+1} + \sum_{j=0}^i d_0^j c_{k-1}^{i-j}.$$

Con lo que (13) ahora se expresa como

$$d_k^0 c_{k-1}^0 - d_{k-1}^0 c_k^0 = 0. \quad (16)$$

Ahora, el Método Pseudoespectral: aproximar la función sobre malla por polinomios de Chebyshev $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N$. Los a_n son los coeficientes de estos polinomios. Conforme $N \rightarrow \infty$ los puntos se distribuyen con la densidad deseada [4]. Se definen las entradas de la matriz de diferenciación de Chebyshev como sigue:

$$(D_N)_{00} = \frac{2N^2+1}{6}, (D_N)_{NN} = -\frac{2N^2+1}{6}, \quad (17)$$

$$(D_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, j \in \{1, 2, \dots, N-1\},$$

donde

$$c_i = \begin{cases} 2 & i = 0 \text{ ó } N \\ 1 & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (18)$$

Procedemos a hacer una linealización [5]

$$L1: \begin{bmatrix} 0 & -N \\ -K & -C \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$L2: \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} - \omega \begin{bmatrix} C & M \\ N & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

con lo cual resulta un problema de eigenvalores generalizado:

$$Ax = B\omega x. \quad (21)$$

con $A, x, B \in \mathcal{M}_{2N \times 2N} \mathbb{C}$.

RESULTADOS

Primer método: Método IAIM

Se implementa el método IAIM, para el potencial

$$V(x) = \frac{V_0}{Ae^{ax} + Be^{-bx} + C}. \quad (22)$$

TABLA I.

PRIMERAS 7 FRECUENCIAS CUASINORMALES PARA EL POTENCIAL (22) CON $V_0 = 2, A = 1, B = 1, C = 0, a = 1/20, b = 1/20$. CALCULADAS CON EL MÉTODO PSEUDOESPECTRAL.

n	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$
1	1	-0,018
2	0,999	-0,053
3	0,999	-0,088
4	0,998	-0,124
5	0,997	-0,159
6	0,995	-0,195
7	0,993	-0,230

TABLA II.

PRIMERAS 8 FRECUENCIAS CUASINORMALES PARA EL POTENCIAL (22) CON $V_0 = 2, A = 1, B = 1, C = 0, a = 1/10, b = 1/10$. CALCULADAS CON EL MÉTODO PSEUDOESPECTRAL.

n	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$
1	1,414	-0,035
2	1,413	-0,106
3	1,411	-0,177
4	1,408	-0,247
5	1,405	-0,318
6	1,400	-0,389
7	1,395	-0,460
8	1,389	-0,531

TABLA III.

PRIMERAS 10 FRECUENCIAS CUASINORMALES PARA EL POTENCIAL (22) CON $V_0 = 2, A = 1, B = 1, C = 0, a = 1/20, b = 1/20$. CALCULADAS CON EL MÉTODO IAIM.

n	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$
1	1	-0,018
2	0,999	-0,053
3	0,999	-0,088
4	0,998	-0,124
5	0,997	-0,159
6	0,995	-0,195
7	0,993	-0,230
8	0,991	-0,265
9	0,988	-0,301
10	0,986	-0,336

TABLA IV.

PRIMERAS 10 FRECUENCIAS CUASINORMALES PARA EL POTENCIAL (22) CON $V_0 = 2, A = 1, B = 1, C = 0, a = 1/10, b = 1/10$. CALCULADAS CON EL MÉTODO IAIM.

n	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$
1	1,414	-0,035
2	1,413	-0,106
3	1,411	-0,177
4	1,408	-0,247
5	1,405	-0,318
6	1,400	-0,389
7	1,395	-0,460
8	1,389	-0,531
9	0	-1,083
10	0	-1,275

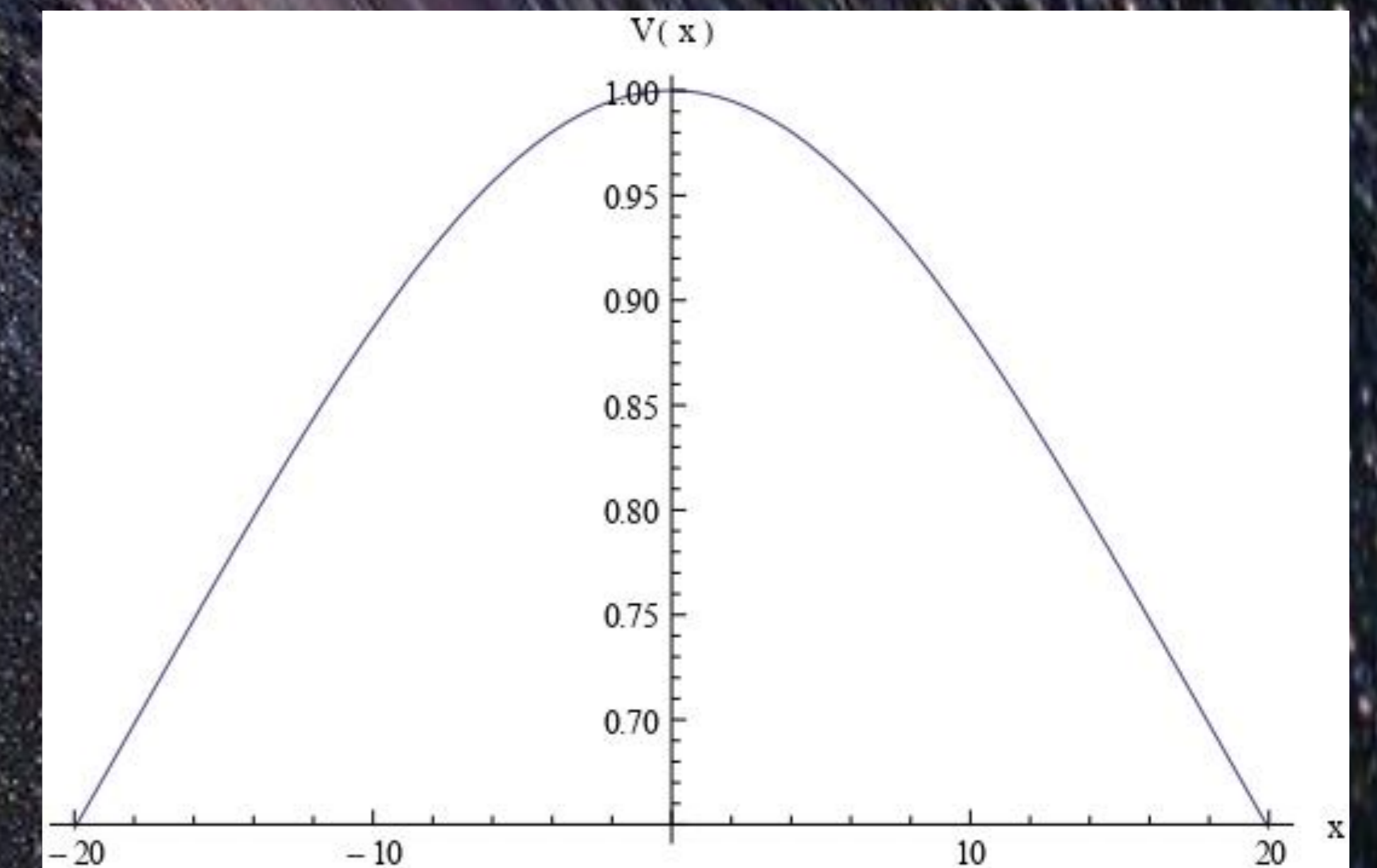


Fig. 1. Gráfica del potencial (22) con $V_0 = 2, A = 1, B = 1, C = 0, a = 1/20$ y $b = 1/20$.

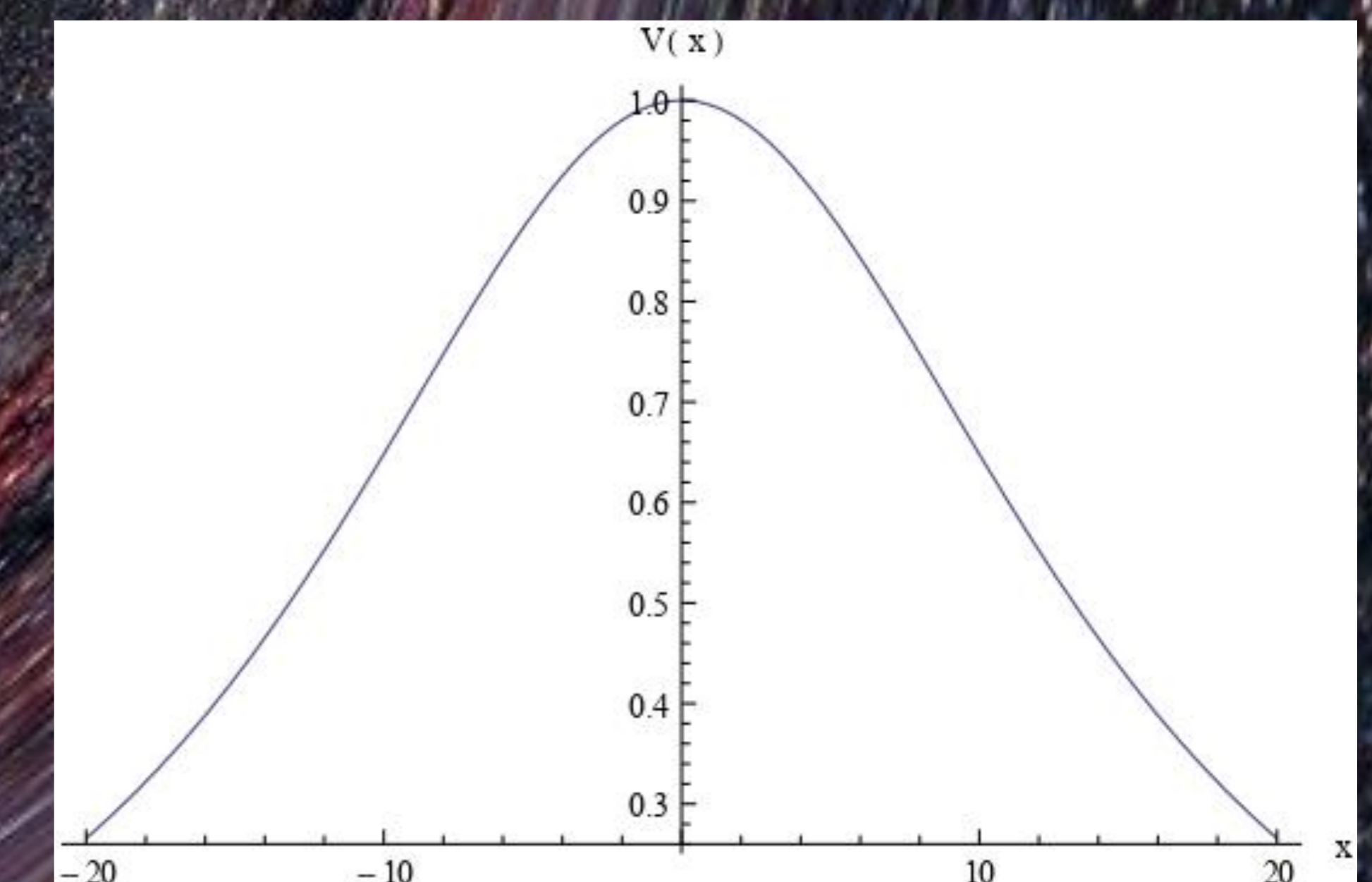


Fig. 2. Gráfica del potencial (22) con $V_0 = 2, A = 1, B = 1, C = 0, a = 1/10$ y $b = 1/10$.

CONCLUSIONES

Se observa que la parte imaginaria de cada número de modo de la Tabla IV es el doble de la parte imaginaria de cada número de modo de la Tabla III hasta el modo 8, a partir del cual las frecuencias de la Tabla IV exhiben un cambio drástico en su comportamiento. Cabe mencionar que los casos en los que no es exactamente el doble, es por la precisión perdida al redondear a tres cifras después del punto. Esto va de acuerdo con que las constantes a y b de la Tabla IV son el doble de aquéllas de la Tabla III. Esto nos dice que el decaimiento exponencial de las ondas para el sistema representado por el potencial (22) en donde $a=b=1/10$ es el doble del decaimiento de las ondas para el sistema en que $a=b=1/20$.

Podemos concluir que las coincidencias en los espectros de frecuencias cuasinormales obtenidos numéricamente a partir de ambos métodos diferentes son una excelente aproximación al valor real al menos a tres cifras después del punto decimal, pues estos métodos son dos formas totalmente distintas de abordar el problema.

REFERENCIAS

- [1] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, "Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes" Living Rev. Rel. vol. 2, 2, 1999.
- [2] H. Ciftci, R. L. Hall and N. Saad, J. "Asymptotic iteration method for eigenvalue problems" Phys. A vol. 36, 11807, 2003.
- [3] H. T. Cho, A. S. Cornell, J. Doukas, T. R. Huang and W. Naylor, "A New Approach to Black Hole Quasinormal Modes: A Review of the Asymptotic Iteration Method" Adv. Math. Phys. vol. 2012, 281705, 2012.
- [4] L. M. Trefethen, "Spectral Methods in Matlab", SIAM, 2000.
- [5] F. Tisseur and K. Meerbergen, "The Quadratic Eigenvalue Problem", SIAM, vol. 43, 235, 2001.