Cardano-Tartaglia y la solución directa a la ecuación de 3 tercer grado

E. Salinas-Hernandez[1], G. Ares de Parga[2], César R. Martínez García[1]
[1]Departamento de Formación Básica, ESCOM-IPN, México D.F., México
[2]Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México
Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55041, E-mail: esalinas@ipn.mx

Resumen — . —***En este trabajo usaremos la transformación de tipo z=x+β, para transformar la ecuación algebraica de tercer grado a otra más sencilla de trabajar, con, que se simplifica mucho eliminando uno de sus términos y aplicando el método de Cardano − Tartaglia. De esta manera obtenemos las tres soluciones de la ecuación de tercer grado de forma directa, a diferencia de construcción original dada por primera vez por Cardano − Tartaglia..***

INTRODUCCIÓN

Las soluciones a las ecuaciones algebraicas de tercer grado [1], [2] aparecen publicadas por primera vez en el libro Ars Magna en 1545 [3] una obra publicada por Gerolamo Cardano, en el que curiosamente las soluciones a la ecuación de cuarto grado también se publicaron, aunque cabe señalar que las soluciones a la ecuación de tercer grado había sido proporcionada previamente por Niccolo Fontana debido a la confianza que tenía en él, se dice que Cardano fue su mentor.

$$Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0 \tag{1.1}$$

Que puede ser llevado a su forma reducida

$$y^3 + py + q = 0 \tag{1.2}$$

Al aplicar la transformación $z = y - \frac{B}{3A}$, y luego de unos ingeniosos pasos, (un desarrollo similar y completo se presenta en el apéndice), es posible obtener la primera solución real de la ecuación cúbica.

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Considerando el discriminante positivo:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$$

Se sabía que las otras dos raíces se obtienen multiplicando cada una de las raíces cúbicas por las raíces cúbicas primitivas de la unidad, es decir, obtenemos un complejo la raíz cúbica

$$u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

y.

$$v = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Después de una manipulación algebraica de la ecuación cúbica reducida podemos llegar en las tres raíces que son las reportadas en la literatura:

$$y_1 = u + v$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(u + v) + \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v)i$$

$$y_3 = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v)i \qquad (1.3)$$

En otras palabras, la solución de (1.1) es

$$z_1 = y_1 - \frac{B}{3A} = u + v - \frac{B}{3A}$$

$$z_2 = y_2 - \frac{B}{3A} = \frac{1}{2}(u + v) + \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v)i - \frac{B}{3A}$$

$$z_3 = y_3 - \frac{B}{3A} = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{\sqrt{3}}{2}(u - v)i - \frac{B}{3A}$$

(1.4)

En este trabajo pudimos obtener directamente las tres soluciones a la tercera ecuación de grado usando la transformación z = x + β y eliminando el libre término de la nueva ecuación aplicando el método desarrollado por Cardano − Tartaglia.

I. PROPUESTA PARA OBTENER LAS SOLUCIONES DIRECTAS A LA ECUACIÓN DE TERCER GRADO

Partimos de la ecuación de tercer grado en su forma general y proponer la siguiente transformación z = x+β, que modifica el tercer grado ecuación en una ecuación mucho más accesible de resolver. Para esto vamos primero imponer que el término libre de la ecuación transformada se elimine aplicando el método tradicional de Cardano − Tartaglia, es decir:

De la ecuación

$$Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0 \qquad (2.1)$$

Considere la transformación z = x + β, entonces (2.1) se modifica de la siguiente manera:

$$Ax^3 + (3A\beta + B)x^2 + (3A\beta^2 + 2\beta B + C)x + \underbrace{A\beta^3 + B\beta^2 + C\beta + D}_{Termino\ libre} = 0 \qquad (2.2)$$

El termino libre de la ecuación (2.2) se resuelve mediante la aplicación del método de Cardano Tartaglia

$$A\beta^3 + B\beta^2 + C\beta + D = 0 \qquad (2.3)$$

$$y^3 + \left(\frac{B^2}{3A^2} + \frac{C}{A}\right)y + \frac{2B^3}{27A^3} + \frac{BC}{3A^2} + \frac{D}{A} = 0 \qquad (2.4)$$

Si definimos

$$p = \frac{B^2}{3A^2} + \frac{C}{A} \ \text{ y } \quad q = \frac{2B^3}{27A^3} + \frac{BC}{3A^2} + \frac{D}{A}$$

Obtenemos

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (2.5)$$

luego al realizar otra transformación y = u+v, y con un poco de álgebra se puede llevar a cabo para

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q = 0$$
(2.6)

pues, según Cardano − Tartaglia al imponer que

$$3uv + p = 0 \Rightarrow u = -\frac{p}{3v}$$

entonces al sustituir en la expresión (2.6) sin el término $(u+v)(3uv+p)$

$$u^3 + v^3 + q = 0 \qquad (2.7)$$

Esto se reduce a

$$-\frac{p^3}{27v^3} + v^3 + q = 0 \Rightarrow v^6 + qv^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

haciendo el cambio de variable $w = v^3$, entonces la expresión se puede llevar a una forma cuadrática

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$$

Las soluciones son

$$w_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}, \quad w_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}$$

Ahora tomando, $v^3 = w$,en la ecuación anterior considerando el signo +.

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}$$

Sustituyendo en (2.7) para la variable u.

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}$$

Entonces y,lo obtenemos como:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}}$$

Y la solución real para (2.3) esta dada por:

$$\beta = y - \frac{B}{3A} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{B}{3A}$$

Siempre que $\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27} > 0$

De la ecuación anterior, si imponemos que

$$A\beta^3 + B\beta^2 + C\beta + D = 0 \qquad (2.8)$$

Volviendo a 2.2 esto se reduce a :

$$Ax^3 + (3A\beta + B)x^2 + (3A\beta^2 + 2\beta B + C)x = 0$$
(2.9)

La ecuación anterior es muy sencillo de resolver, señalando que este es precisamente el ventaja de nuestro método, de hecho, se puede ver de inmediato que la primera solución es $x_1 = 0$, mientras que las otras dos soluciones se pueden obtener de la expresión cuadrática:

$$Ax^2 + (3A\beta + B)x + (3A\beta^2 + 2\beta B + C) = 0$$
(3.0)

Aplicando la formula general de segundo grado:

$$x_2 = \frac{-(3A\beta + B)}{2A} + \frac{\sqrt{(3A\beta + B)^2 - 4A(3A\beta^2 + 2B\beta) + C}}{2A}$$

Y

$$x_3 = \frac{-(3A\beta + B)}{2A} - \frac{\sqrt{(3A\beta + B)^2 - 4A(3A\beta^2 + 2B\beta) + C}}{2A}$$

Luego, las soluciones a la ecuación (2.1), recordando la transformación z= $x + \beta$, y también utilizando el valor de β calculado en el apéndice, vendrá dado por:

$$z_1 = x_1 + \beta = 0 + \beta = \beta$$

$$z_2 = x_2 + \beta = \frac{-(3A\beta + B)}{2A} + \frac{\sqrt{(3A\beta + B)^2 - 4A(3A\beta^2 + 2B\beta) + C}}{2A} + \beta$$

$$z_3 = x_3 + \beta = \frac{-(3A\beta + B)}{2A} - \frac{\sqrt{(3A\beta + B)^2 - 4A(3A\beta^2 + 2B\beta) + C}}{2A} + \beta$$

(3.1)

Con

$$\beta = u + v - \frac{B}{3A} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} - \frac{p^3}{27}}} - \frac{B}{3A}$$

(3.2)

Es decir, de forma natural obtenemos las tres soluciones de la ecuación (2.1), que no se da en la construcción original realizada por Cardano − Tartaglia. Este (método de Cardano-Tartaglia) solo puede dar la solución real siempre que como $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, ya que las otras dos soluciones se buscan partiendo de la raíces complejas de unidad, lo que claramente no hicimos en este trabajo. El camino que hemos hecho para las dos últimas soluciones es totalmente diferente del reportada por Cardano − Tartaglia, de hecho, se puede observar que nuestras últimas dos soluciones tienen una estructura diferente a las reportadas.

II. EJEMPLO

Consideré la siguiente ecuación:

$$4 - 2z - 3z^2 + z^3 = 0 \qquad \text{(E1)}$$

Ahora considere el cambio z=x+β, donde β esta dado por ec. (3.2):

$$p = \frac{B^2}{3A^2} + \frac{C}{A} = \frac{(-3)^2}{3(1)^2} + \frac{-2}{1} = 1$$

y

$$q = \frac{2B^3}{27A^3} + \frac{BC}{3A^2} + \frac{D}{A} = \frac{2(-3)^3}{27(1)^3} + \frac{(-3)(-2)}{3(1)^2} + \frac{4}{1} = 4$$

Con p y q calculados pasamos a calcular β;

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{(4)^2}{4} + \frac{(1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{(4)^2}{4} + \frac{(1)^3}{27}}} - \frac{-3}{3(1)} = 1$$

Así el cambio z=x+1 ec (E1) reduce a la ecuación:

$$-5x + x^3 = 0$$

Que podemos factorizar como

$$x(-5 + x^2) = 0$$

Cuyas raíces son x_1=0, x_2=$\sqrt{5}$ y x_3=$-\sqrt{5}$

De esta manera que la raíces la calculamos como:

$$z_1 = x_1 + \beta = 1$$

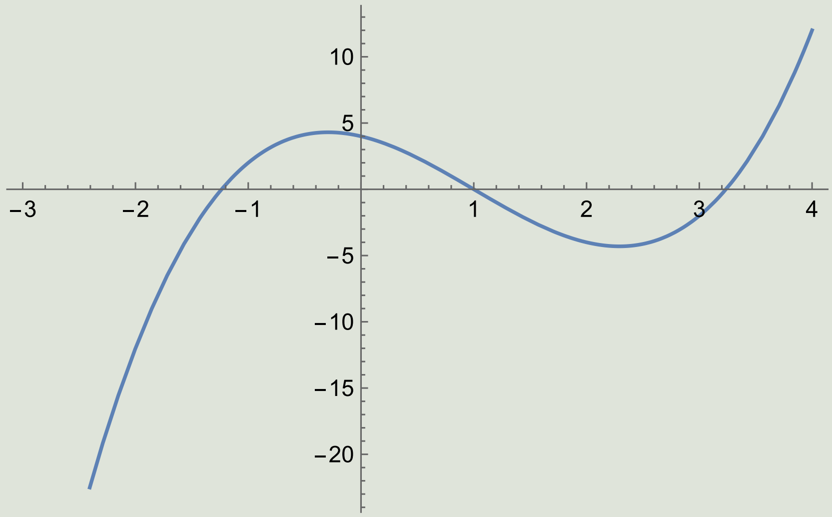
Y

$$z_2 = x_2 + \beta = 1 + \sqrt{5}$$

$$z_3 = x_3 + \beta = 1 - \sqrt{5}$$

De donde x_2 y x_3, están dador por (3.1)

Esto lo podemos ver gráficamente:



III. Referencias

[1] Guillermo Pastor, “Ecuaciones de tercer grado y cuarto grado: Teorema del Tulipan”, Miscelanea Matemática, 21, 21-28(1994)

[2] V. Uspensky, “Teoría de ecuaciones”, Editorial Limusa (1987) pagina 387

[3] Gerolano Cardano, “Artis Magnae, sirve de reugulis algebraisis”, (1545) Italia, en Latín

[4] Smith, David Eugene; Latham, Marcia L., “Geometrie: The Geometry of Rene Descartes”, Editorial: Open Court Pub Co, 1925, ISBN 10:087548168X/ ISBN 13:9780875481685

[5] Joseph Liouville, “Ou Recueil Mensuel de Mémoires Sur Les Diverses Parties Des mathématiques”, (Classic Reprint) (francés) Pasta blanda, 25 noviembre 2018.

[6] A. I. Kostrikin “Introducción al Álgebra”, Editorial MIR