

Crterios para el uso de la aproximación de onda rotante en el modelo de Rabi

Jean Claude Ducolomb, J. Avendaño

Departamento de Física, ESFM-Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México., México., Teléfono (55) 5729-6000 Ext. 55375 Fax (55) 5729-55015 jcdulomb@gmail.com



RESUMEN

En este artículo se presenta el desarrollo teórico en el cual está fundamentado el modelo de Rabi, siendo este un sistema semiclásico de un átomo de dos niveles de energía inmerso en radiación electromagnética dentro de una cavidad, así como la validez de la solución aproximada usando la aproximación de onda rotante (RWA) comparándola con la solución exacta calculada a través del software wolfram mathematica. Con lo cual se establecerán criterios para usar la aproximación de onda rotante de manera válida en dicho sistema.

OBJETIVOS

El objetivo es establecer criterios que sirvan como guía para saber cuándo la RWA es válida en el modelo de Rabi, constituido por un átomo de dos niveles.

DESARROLLO DEL TEMA

El hamiltoniano para el sistema descrito por el modelo de Rabi es

$$\hat{H}^t = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V(r) - \hat{d} \cdot \mathbf{E}(t)$$

Donde \hat{d} es el momento dipolar $e\hat{r}$ correspondiente al átomo, dicho hamiltoniano se puede separar en dos

$$\hat{H}^t = \hat{H}_0 + \hat{H}_p = \hat{H}_0 - \hat{d} \cdot \mathbf{E}(t)$$

donde \hat{H}_0 es el hamiltoniano atómico libre y \hat{H}_p es el hamiltoniano de interacción entre el átomo y la radiación. Este último se puede tratar como una perturbación dependiente del tiempo.

Suponiendo que la forma del campo eléctrico es la de una onda sinusoidal [3,8], $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$, dicha suposición es válida pues se están considerando distancias interatómicas, con lo cual el campo electromagnético es prácticamente constante en dicha región, está es llamada la aproximación dipolar [5].

Considerando ahora el sistema compuesto por un átomo de dos niveles energéticos inmerso en la radiación electromagnética, la función de onda que describe al sistema de dos niveles tiene la forma

$$\Psi = c_0 e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} \psi_0 + c_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} \psi_1$$

donde el estado ψ_1 corresponde al estado excitado y ψ_0 al estado base y ambos estados son ortogonales y están normalizados, siendo E_1 y E_0 las energías correspondientes.

Usando la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

con el hamiltoniano (9) nos lleva [4] a la ecuación

$$c_0 \hat{H}_p \psi_0 e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} + c_1 \hat{H}_p \psi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} = i\hbar (\dot{c}_0 \psi_0 e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} + \dot{c}_1 \psi_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t})$$

Ahora bien, si se proyecta la ecuación anterior sobre los estados ψ_0 y ψ_1 , considerando la ortonormalidad [4,5] de los estados se obtienen las siguientes ecuaciones respectivamente [6]

$$\begin{aligned} \dot{c}_0 &= iA_{01}(e^{i\omega_- t} + e^{-i\omega_+ t})c_1 \\ \dot{c}_1 &= iA_{10}(e^{i\omega_+ t} + e^{-i\omega_- t})c_0 \end{aligned}$$

La aproximación de onda rotante (RWA) desprecia los términos exponenciales que tienen ω_+ [6,7,8] de las ecuaciones anteriores, los cuales son llamados los términos contrarrotantes [7], obteniendo así

$$\begin{aligned} \dot{c}_0 &= iA_{01}e^{i\omega_- t}c_1 \\ \dot{c}_1 &= iA_{10}e^{-i\omega_- t}c_0 \end{aligned}$$

Considerando las condiciones iniciales $c_0(0) = 1$ y $c_1(0) = 0$ se obtiene de las ecuaciones la solución

$$c_1(t) = 2i \frac{A}{\Omega_R} e^{-i\frac{\omega_-}{2}t} \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$$

donde $\Omega_R = \left(\omega_-^2 + \frac{A^2}{\hbar^2}\right)^{1/2}$ es llamada la frecuencia de Rabi [8].

De aquí se sigue que la probabilidad de transición al estado final es

$$P_{0 \rightarrow 1}(t) = |c_1(t)|^2 = \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0)^2}{\hbar^2 \Omega_R^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right)$$

Se compara en las gráficas esta solución con la solución exacta tomando el reescalamiento del tiempo

$$\tau = \frac{1}{2\hbar} \mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{E}_0 t$$

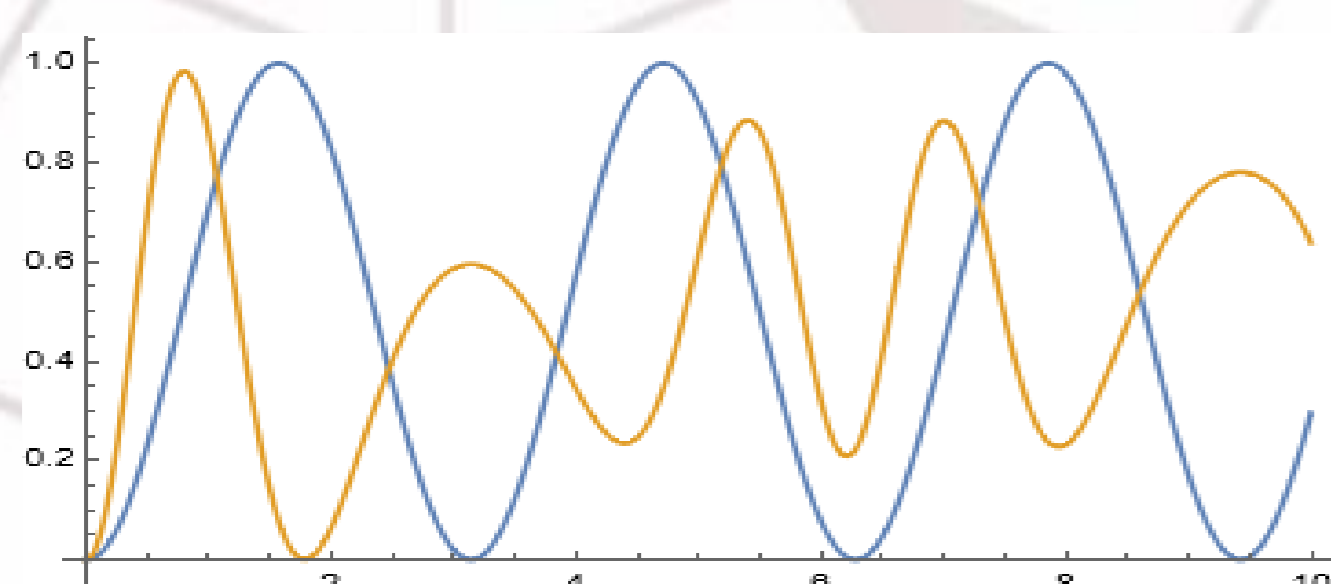


Fig. 1. Gráfica de la evolución temporal, τ en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$ en el eje vertical, para valores de $\Delta = 0$ y $\Gamma = 1$. La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

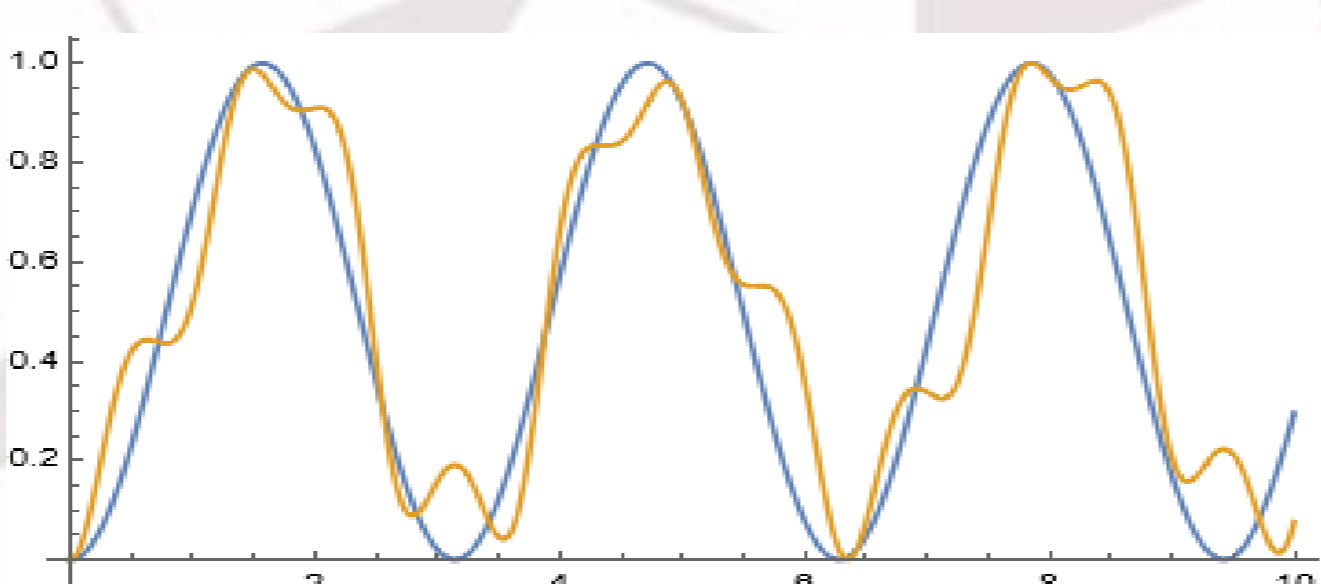


Fig. 2. Gráfica de la evolución temporal, τ en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$ en el eje vertical, para valores de $\Delta = 0$ y $\Gamma = 5$. La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

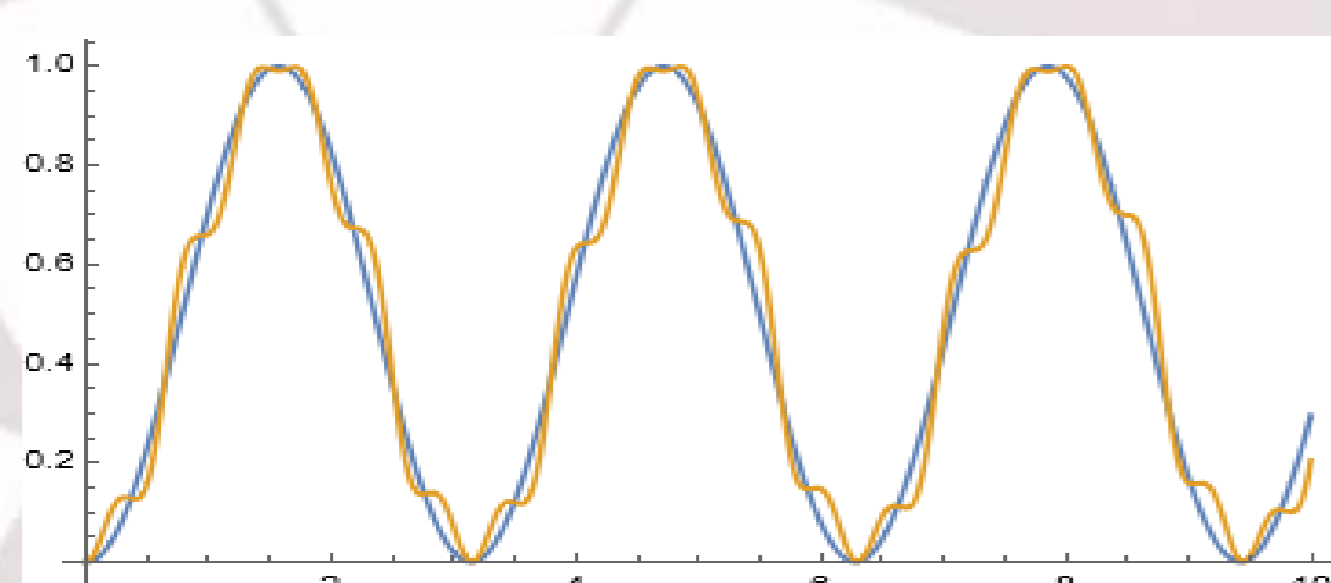


Fig. 3. Gráfica de la evolución temporal, τ en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$ en el eje vertical, para valores de $\Delta = 0$ y $\Gamma = 10$. La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

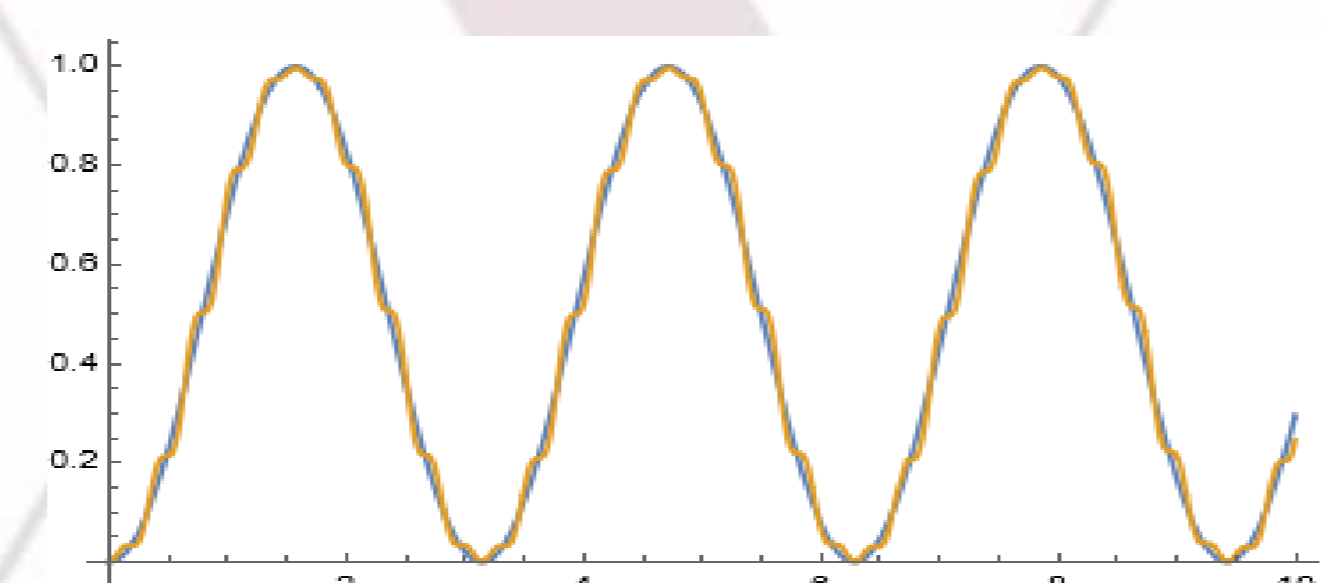


Fig. 4. Gráfica de la evolución temporal, τ en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$ en el eje vertical, para valores de $\Delta = 0$ y $\Gamma = 20$. La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

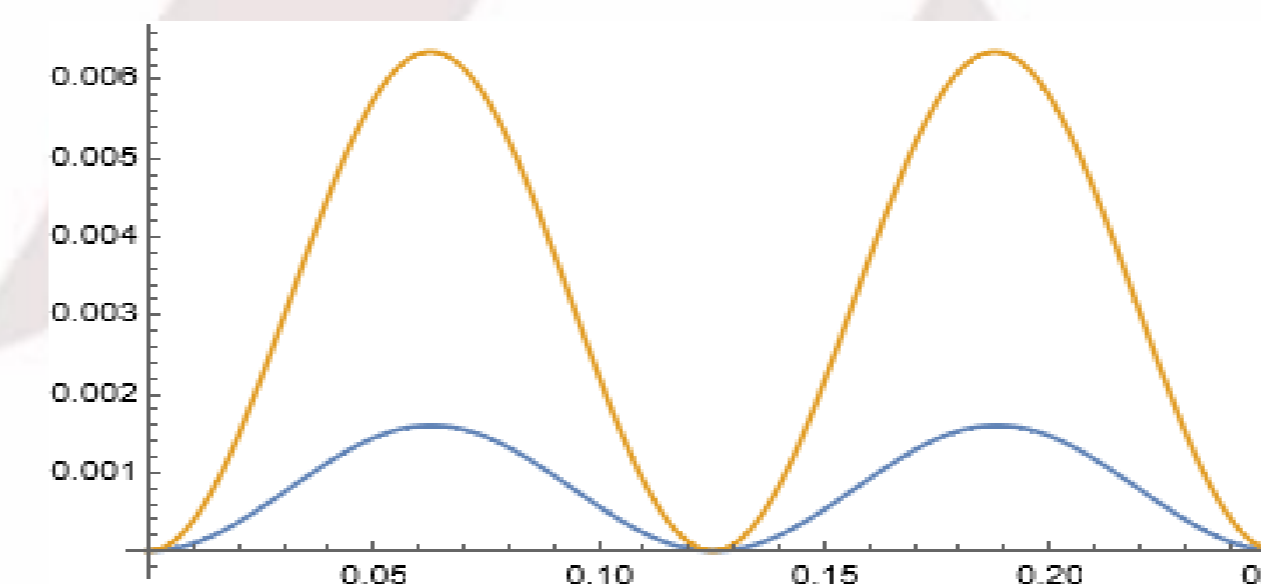


Fig. 5. Gráfica de la evolución temporal, τ en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$ en el eje vertical, para valores de $\Delta = -50$ y $\Gamma = 50$. La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

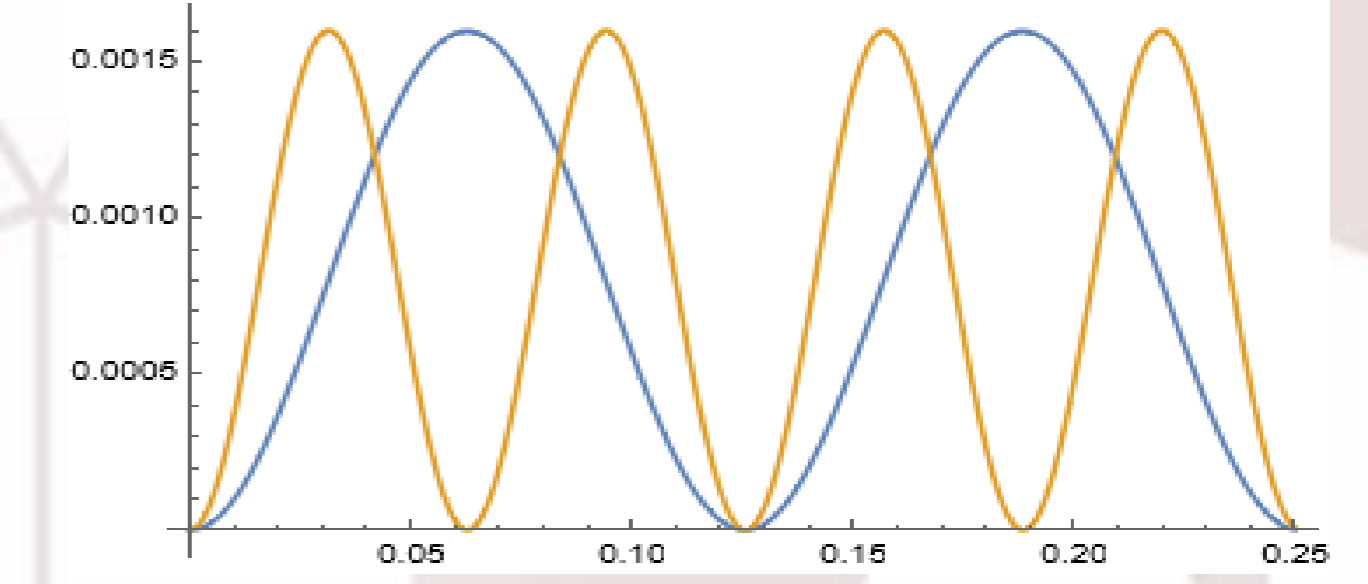


Fig. 6. Gráfica de la evolución temporal, τ en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$ en el eje vertical, para valores de $\Delta = 50$ y $\Gamma = 50$. La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

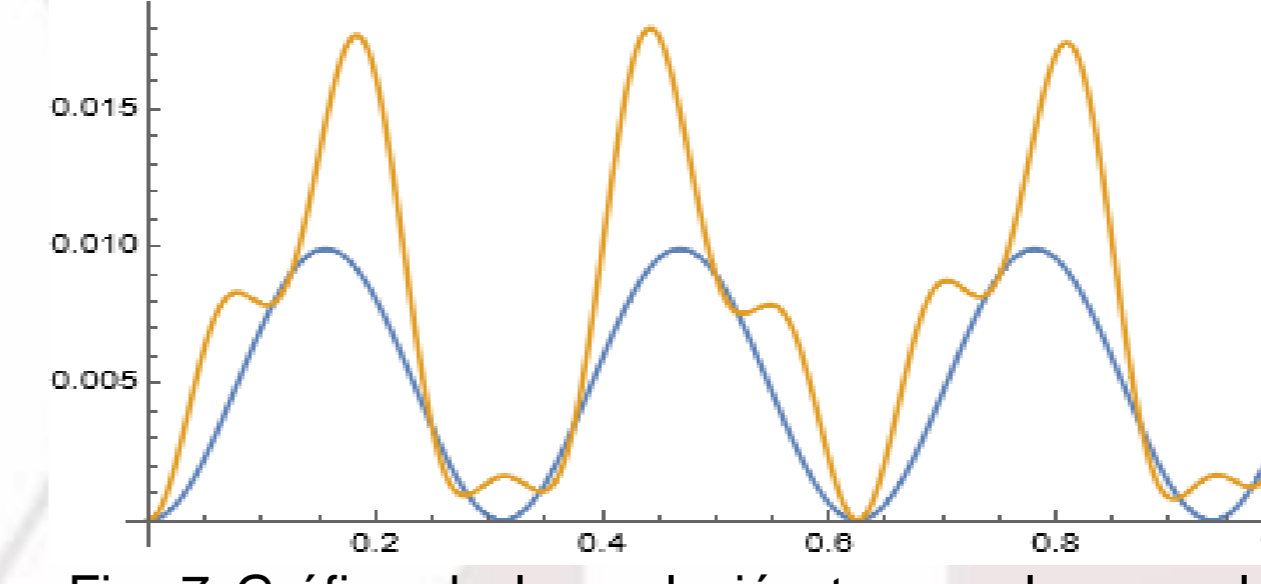


Fig. 7. Gráfica de la evolución temporal, τ en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$ en el eje vertical, para valores de $\Delta = -20$ y $\Gamma = 20$. La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

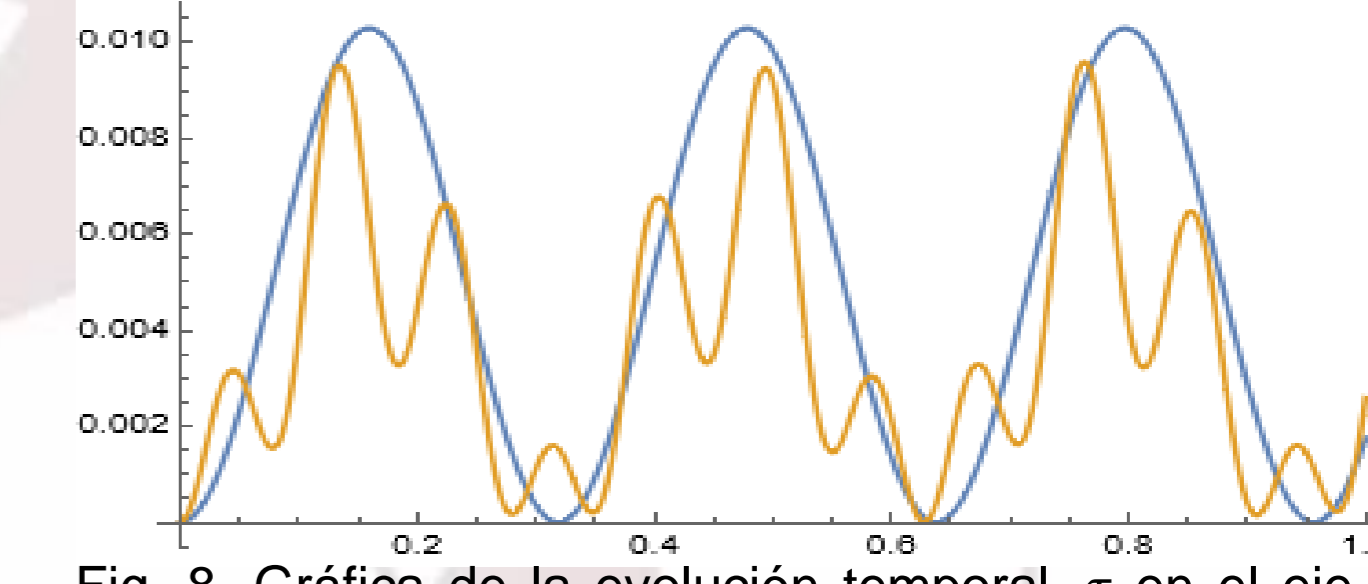


Fig. 8. Gráfica de la evolución temporal, τ en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$ en el eje vertical, para valores de $\Delta = 20$ y $\Gamma = 20$. La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

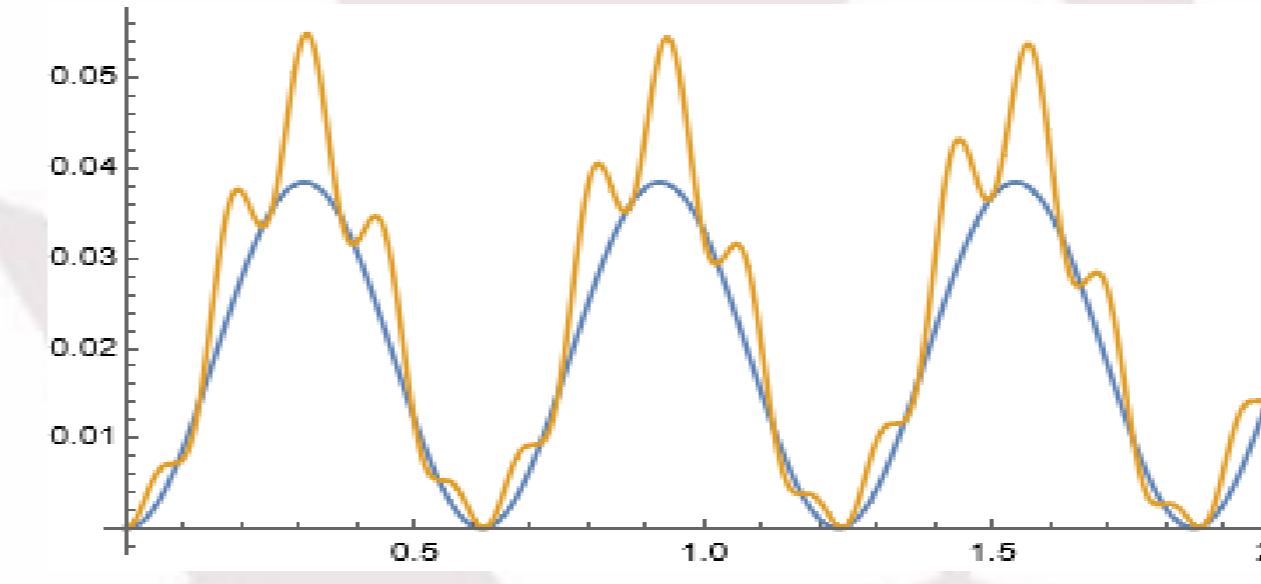


Fig. 9. Gráfica de la evolución temporal, τ en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$ en el eje vertical, para valores de $\Delta = -10$ y $\Gamma = 10$. La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

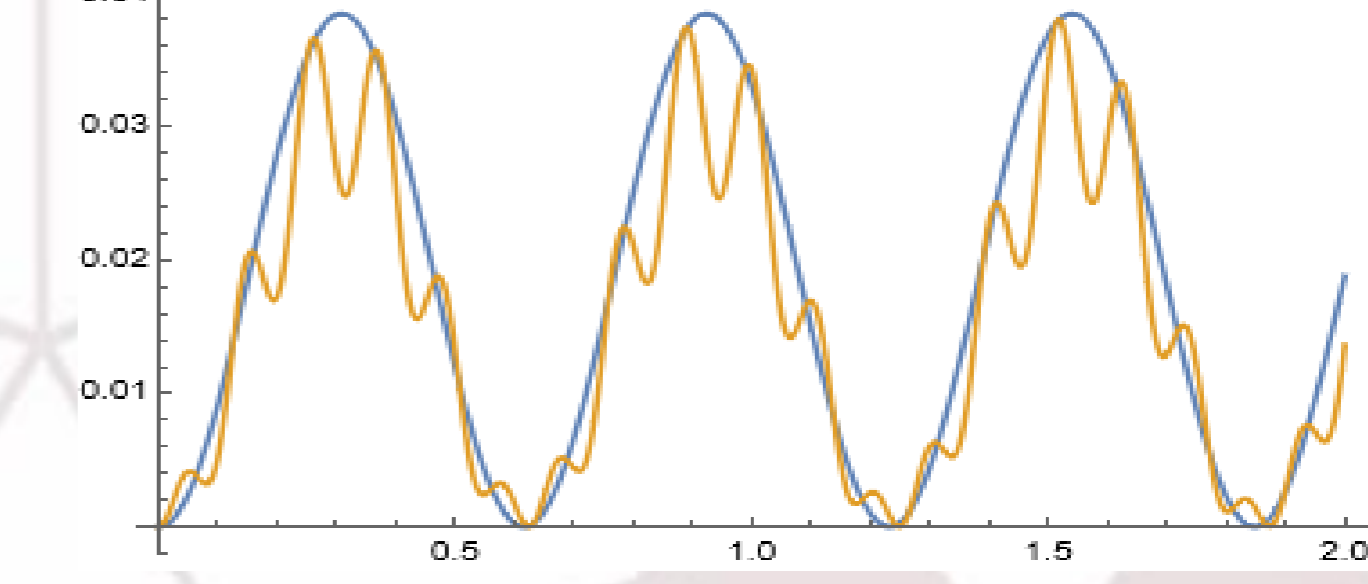


Fig. 10. Gráfica de la evolución temporal, τ en el eje horizontal contra la probabilidad de transición de estados $P_{0 \rightarrow 1}(\tau)$ en el eje vertical, para valores de $\Delta = 20$ y $\Gamma = 20$. La curva azul representa la aproximación y la naranja la solución exacta.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las condiciones físicas que pueden llevar a que la RWA sea usada como una aproximación válida para un problema de este tipo son las siguientes:

1. La intensidad del campo electromagnético aplicado sea pequeña
2. El momento dipolar sea pequeño
3. La frecuencia de la radiación domine a la frecuencia de resonancia
4. La frecuencia de resonancia domine a la frecuencia de la radiación

De tal manera que cumplan que $\Gamma = \frac{2\hbar\omega + \omega_0}{\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{E}_0} \gg 20$ y tras analizarlas se toma

$$\|\psi_1\| \|\psi_0\| E_0 \cos\theta < 1.242$$

El modelo de Rabi es un modelo importante para dar los primeros pasos hacia varias ramas del mundo cuántico como la óptica cuántica, teoría cuántica de campos, teoría cuántica de la información etcétera, la aproximación de onda rotante en dicho modelo es parte crucial para la resolución analítica del sistema. Por estas razones es importante saber bajo qué condiciones físicas es aceptable realizar la aproximación de onda rotante. Tras haberse analizado los criterios que puede alterar la efectividad de la aproximación, se llegó a la relación que se debe de cumplir de manera aproximada para poder usar dicha aproximación y que el resultado sea suficientemente válido comparado con el real. Siendo este, en resumidas cuentas, un campo electromagnético débil para poder despreciar los términos contrarrotantes.

Por otro lado, aunque el criterio fue establecido bajo el sistema que describe el modelo de Rabi, siendo un sistema semiclásico, es posible generalizar los criterios para sistemas totalmente cuánticos estableciendo las equivalencias entre los parámetros físicos concernientes.

REFERENCIAS

- [1] Peter W. Milonni. (2019). An introduction to quantum optics and quantum fluctuations. Oxford university press.
- [2] Tom Lancaster, Stephen J. Blundell. (2014). Quantum field theory for the gifted amateur. Oxford university press.
- [3] G. Gilbert, A. Aspect, C. Fabre. (2010). Introduction to quantum Optics. Cambridge university press.
- [4] Nouredine Zetilli. (2009). Quantum Mechanics: Concepts and applications. John Wiley and Sons, Ltd.
- [5] Claude Cohen-Tanoudji, Bernard Diu, F. Laloë.. Quantum mechanics.
- [6] David J. Griffiths, Darrell F. Schroeter. (2018). Introduction to quantum mechanics. Cambridge university press.
- [7] Duje Bonacci. (2018). Rabi spectra - a simple tool for analyzing the limitations of RWA in modelling of the selective population transfer in many-level quantum systems. Physics review.
- [8] Christopher C. Gerry, Peter L. Knight. (2005). Introductory quantum optics. Cambridge university press.