PROBLEMA SUTIL DE UNA INTEGRAL DOBLE IMPROPIA

Carlos López Lima[1], **Verónica Lucero Villegas Rueda**[2]
Departamento de Física ESFM-IPN, CDMX, México.[1]
Departamento de Ciencias Básicas UPIITA-IPN, CDMX, México.[2]
carlosomega40@hotmail.es[1]

RESUMEN

Se presentan dos soluciones al problema 5 del capítulo 15 de [1], donde el autor propone calcular una integral impropia de dos variables. La primera solución, se hace un desarrollo en serie del integrando, se integra y se calcula el límite de la serie con resultados de variable compleja [2]. Segunda solución, se hace un cambio de dos variables y se evalúa sin la necesidad de utilizar variable compleja. Finalmente, se discute la importancia de la segunda solución para alumnos que están cursando cálculo de varias variables.

PROBLEMA

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1-xy} \tag{1}$$

donde (1) se define como el límite de la integral sobre el rectángulo $[0,t)\times[0,t)$ cuando $t \to 1^-$.

Considerado la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}; \quad |x|<1 \tag{2}$$

Tomando xy en (2) y al sustituir en (1)

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n \mathrm{d}y \tag{3}$$

Integrando (3) se obtiene

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1-xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{4}$$

SOLUCIÓN 1

Para calcular (4) se utiliza

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{i=1}^{K} \mathrm{Res}^* \left[\pi \cot(\pi z) f(z)\right] \tag{5}$$

donde $\mathrm{Res}^*[\pi\cot(\pi z)f(z)]$, es el residuo de $\pi\cot(\pi z)f(z)$, en el polo de $f(z)$ y $z \in \mathbb{C}$.

Si $f(z) = (z^2+a^2)^{-1}$ con $a>0$, entonces $f(z)$ tiene dos polos $z = \pm ia$. El residuo en $z = ia$ es

$$\lim_{z\to ia} \frac{z-ia}{z^2+a^2}\pi\cot(\pi z) = -\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) \tag{6}$$

y el residuo en $z=-ia$

$$\lim_{z\to -ia} \frac{z+ia}{z^2+a^2}\pi\cot(\pi z) = -\frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) \tag{7}$$

Al sustituir (6) y (7) en (5) se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a), \tag{8}$$

donde (8) se puede reescribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2} \tag{9}$$

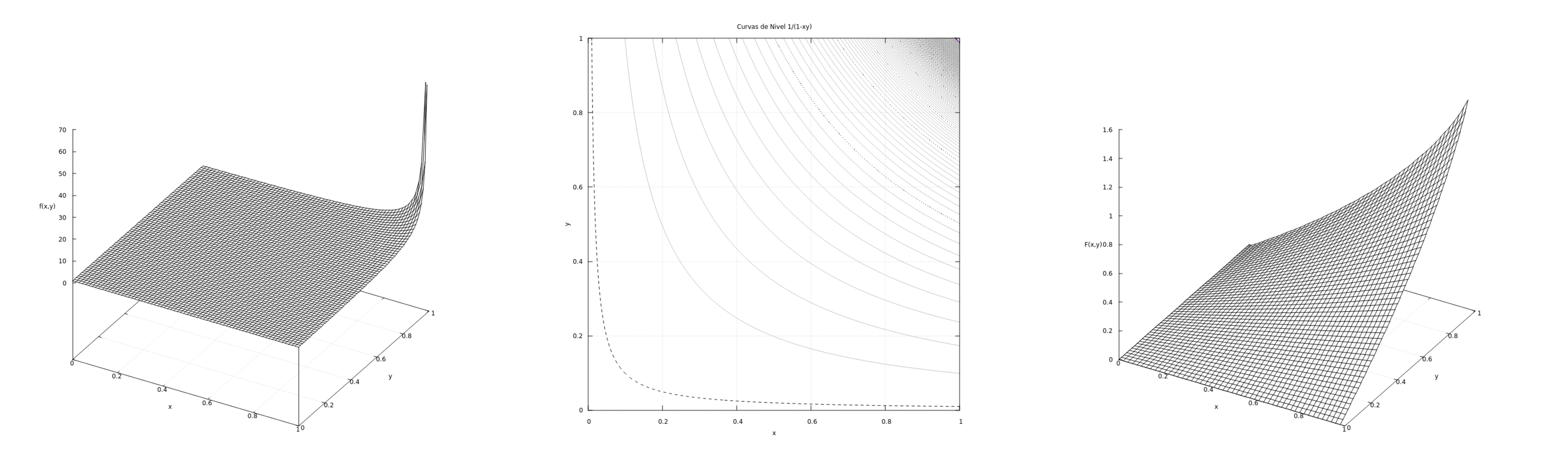
Finalmente, cuando $a \to 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{10}$$

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está patrocinado en parte por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, proyecto SIP-20221210.

GRÁFICAS



De izquierda a derecha; la gráfica 1 muestra $f(x,y) = \frac{1}{1-xy}$, la gráfica 2 muestra las curvas de nivel de $f(x,y)$, la gráfica 3 muestra a $F(x,y) = \int_0^x \mathrm{d}\xi \int_0^y \frac{1}{1-\xi\eta}\mathrm{d}\eta$ con $(x,y) \in [0,1)\times[0,1)$.

SOLUCIÓN 2

Se porpone el cambio de dos variables

$$x = \frac{u-v}{\sqrt{2}}; \quad y = \frac{u+v}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

El determinante de la matriz jacobiana

$$\det\left(J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)\right) = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \tag{12}$$

donde $u_\xi = \frac{\partial u}{\partial \xi}$, $v_\xi = \frac{\partial v}{\partial \xi}$ con $\xi = x, y$.
Note, al sumar $x+y$, sustituir (11) y despejar u

$$x+y = \frac{u-v}{\sqrt{2}} + \frac{u+v}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}u \Rightarrow u = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \tag{13}$$

y al restar $x-y$, sustituir (11) y despejar v

$$v = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \tag{14}$$

entonces $\det(J) = 1$. De (1) se obtiene la región de integración en el plano XY, con (13) y (14) se obtiene la región de integración en el plano UV, ver la Fig. (1).

La frontera del cuadrado en el plano XY construye un cuadrado rotado $\pi/4$ respecto al origen en el plano UV. La integral (1) se transforma

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1-xy} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}u \int_{-u}^{u} \frac{2\mathrm{d}v}{2-(u^2-v^2)} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}u \int_{-\sqrt{2}+u}^{\sqrt{2}-u} \frac{2\mathrm{d}v}{2-(u^2-v^2)} \tag{15}$$

Al integrar con respecto a v la primera integral del lado derecho (15)

$$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}u \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \left[\tan^{-1} \frac{v}{\sqrt{2-u^2}}\right]_{-u}^{u} \tag{16}$$

Análogamente, la segunda integral

$$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}u \frac{1}{\sqrt{2-u^2}} \left[\tan^{-1} \frac{v}{\sqrt{2-u^2}}\right]_{-\sqrt{2}+u}^{\sqrt{2}-u} \tag{17}$$

evaluando

$$4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{tg}^{-1} \frac{u}{\sqrt{2-u^2}}}{\sqrt{2-u^2}} \mathrm{d}u + 4\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{tg}^{-1} \frac{\sqrt{2}-u^2}{\sqrt{2-u^2}}}{\sqrt{2-u^2}} \mathrm{d}u \tag{18}$$

Si $u = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta$ entonces $\mathrm{d}u = \sqrt{2}\cos\theta \mathrm{d}\theta$. Sustituyendo y simplificando

$$4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta \mathrm{d}\theta + 4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1-\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{6} \tag{19}$$

Para resolver la segunda integral en (19), hay que rescribir el argumento de tg^{-1}, con $\mathrm{sen}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta \pm \mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha$ y $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$.

REPRESENTACIÓN

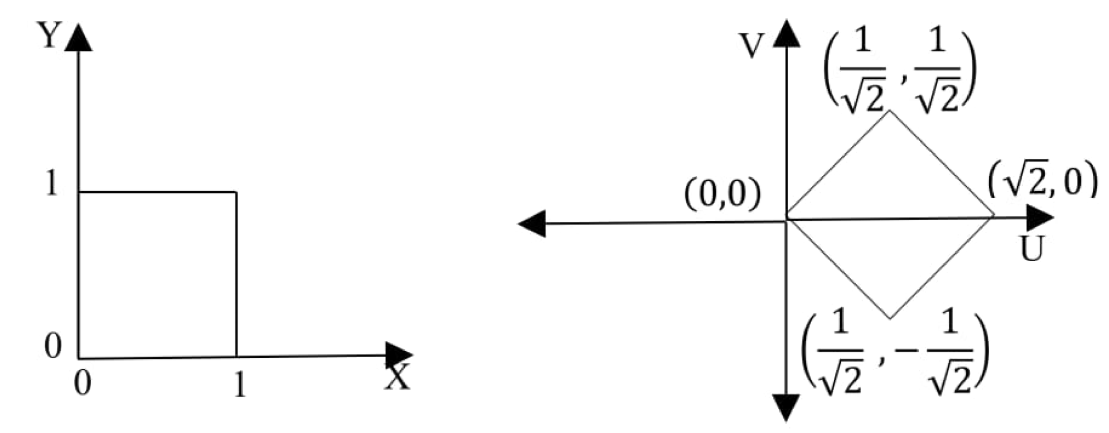


Fig 1. Región de integracion (1) plano XY (izquierda) y región de integración (15) plano UV (derecha).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

1. La solución 1 necesita como requisitos desarrollar funciones en series geométricas, integración de series, identidades trigonométricas complejas y cálculo de una serie por el teorema del residuo.

2. La solución 2 necesita tener conocimientos para el cambio de dos variables, que está relacionado a una transformación lineal (11), cálculo de la matriz Jacobiana y su determinante (12), cambio de la región de integración (Fig. 1), cambio de una variable, propiedad de la función inversa suma y diferencia de ángulos en las funciones trigonométricas e integrar (18).

3. Después de comparar los dos procedimientos y llegar al mismo resultado (10) y (19), se observa que el primer procedimiento que considera variable compleja es más corto que el segundo procedimiento que utiliza cálculo de varias variables. Pero, para un alumno que está cursando cálculo de varias variables no se puede utilizar el primer procedimiento para resolver (1) así que se puede utilizar y recomendamos el segundo procedimiento.

4. Aunque hay variantes del cálculo de la serie (4) por medio de productos infinitos o por la aplicación de series Laurent estos temas no están al alcance para un alumno que está cursando cálculo de varias variables. Sin embargo, estos análisis se consideran para un trabajo posterior.

REFERENCIAS

[1] James Stewart, Cálculo de Varias Variables: Trascendentes Tempranas 7ed. Cengage Learning, *2012, p. 1053.*

[2] Murray R. Spiegel, Variable compleja 2ed. McGRAW HILL, *2011, pp. 205-241.*