



# Eficiencia a máxima potencia de una máquina térmica browniana



O. Contreras-Vergara<sup>1</sup>, G. Valencia-Ortega<sup>2</sup>, N. Sánchez-Salas<sup>1</sup>, J.I. Jiménez-Aquino<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional - Edif. 9 UP Zacatenco, CP 07738, Ciudad de México, México.

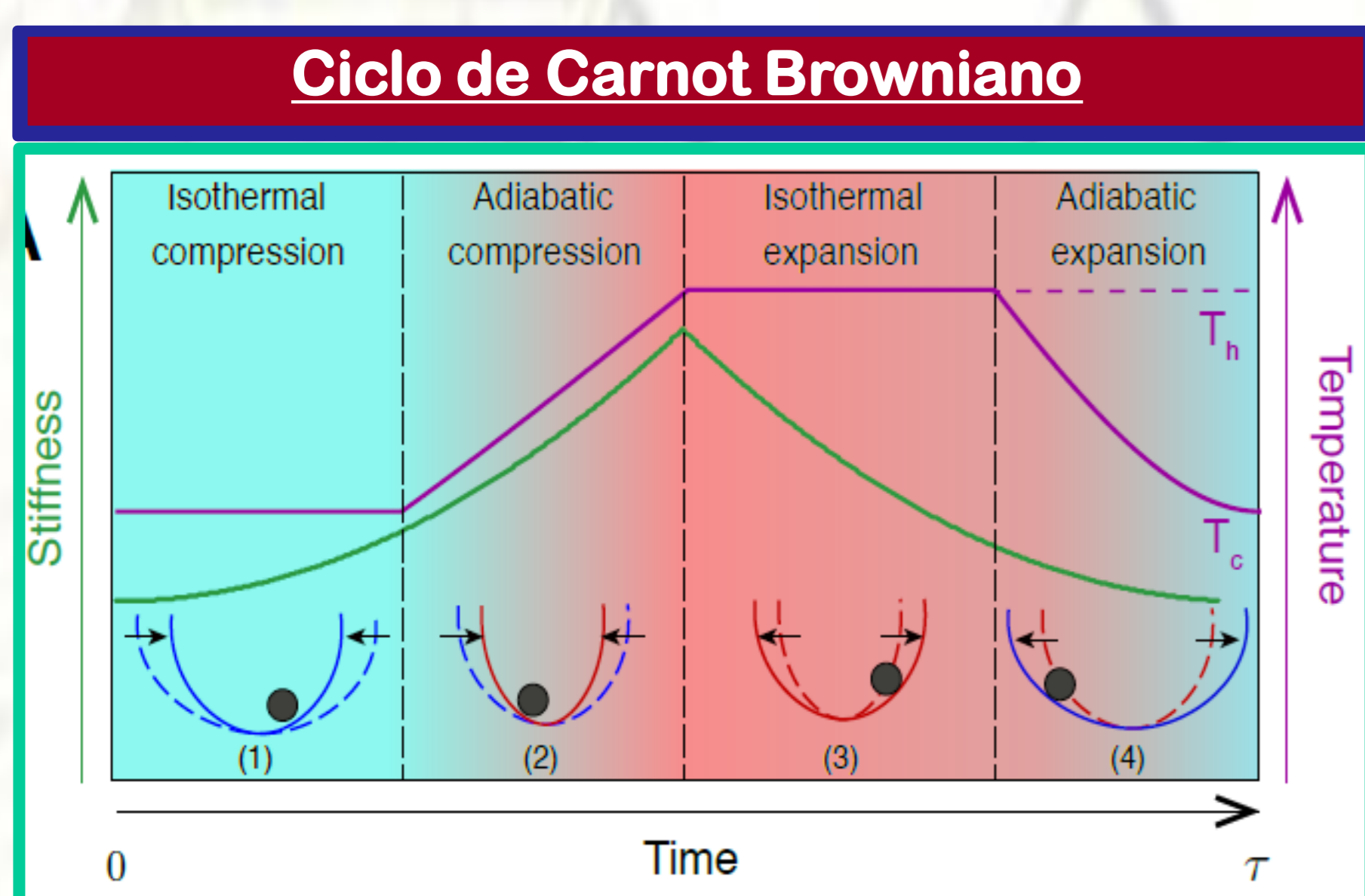
<sup>2</sup>División de Matemáticas e Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México-FES Acatlán, C.P. 53150, Edo. de Mex., México.

<sup>3</sup>Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa - Apartado Postal 55-534, CP 09340, Ciudad de México, México.

E-mail: ocontrerasv1300@alumno.ipn.mx, gvalenciao@ipn.mx, nsanchezs@ipn.mx, ines@xanum.uam.mx

## RESUMEN

Se estudia el desempeño de una máquina térmica estocástica en el régimen de máxima potencia. La máquina opera con una partícula Browniana atrapada en un potencial armónico y emula un ciclo tipo Carnot, con dos isotermas y dos ramas tipo adiabáticas. El sistema puede describirse por medio de la ecuación de Langevin, a continuación se aplica la estrategia de [1] para obtener una expresión determinista del desplazamiento cuadrático promedio con la que es posible encontrar el calor (promedio) y trabajo (promedio) en cada proceso del ciclo. Finalmente, se usa el modelo termodinámico de baja disipación y se obtiene la eficiencia del ciclo a máxima potencia.



De manera correspondiente al caso del gas ideal

$$dF = -SdT + \Phi d\kappa \quad (7)$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\kappa = \frac{k_B}{2} \left[ \ln\left(\frac{2\pi k_B T}{\kappa}\right) + 1 \right] \quad (8)$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial F}{\partial \kappa}\right)_T = \frac{k_B T}{2\kappa} = \frac{\langle x^2 \rangle}{2} \quad (9)$$

Tomando en cuenta las condiciones de adiabaticidad del proceso

$$\frac{\kappa_2}{T_h} = \frac{\kappa_3}{T_c}, \quad \frac{\kappa_1}{T_h} = \frac{\kappa_4}{T_c} \rightarrow \frac{\kappa_4}{\kappa_3} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \quad (17)$$

$$\eta_C = \frac{T_h - T_c}{T_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad (18)$$

Condición de baja disipación

$$Q_1 = T_c \left( -\Delta S - \frac{\Sigma_1}{\tau_1} \right), \quad (23)$$

$$Q_2 = T_h \left( \Delta S - \frac{\Sigma_2}{\tau_2} \right). \quad (24)$$

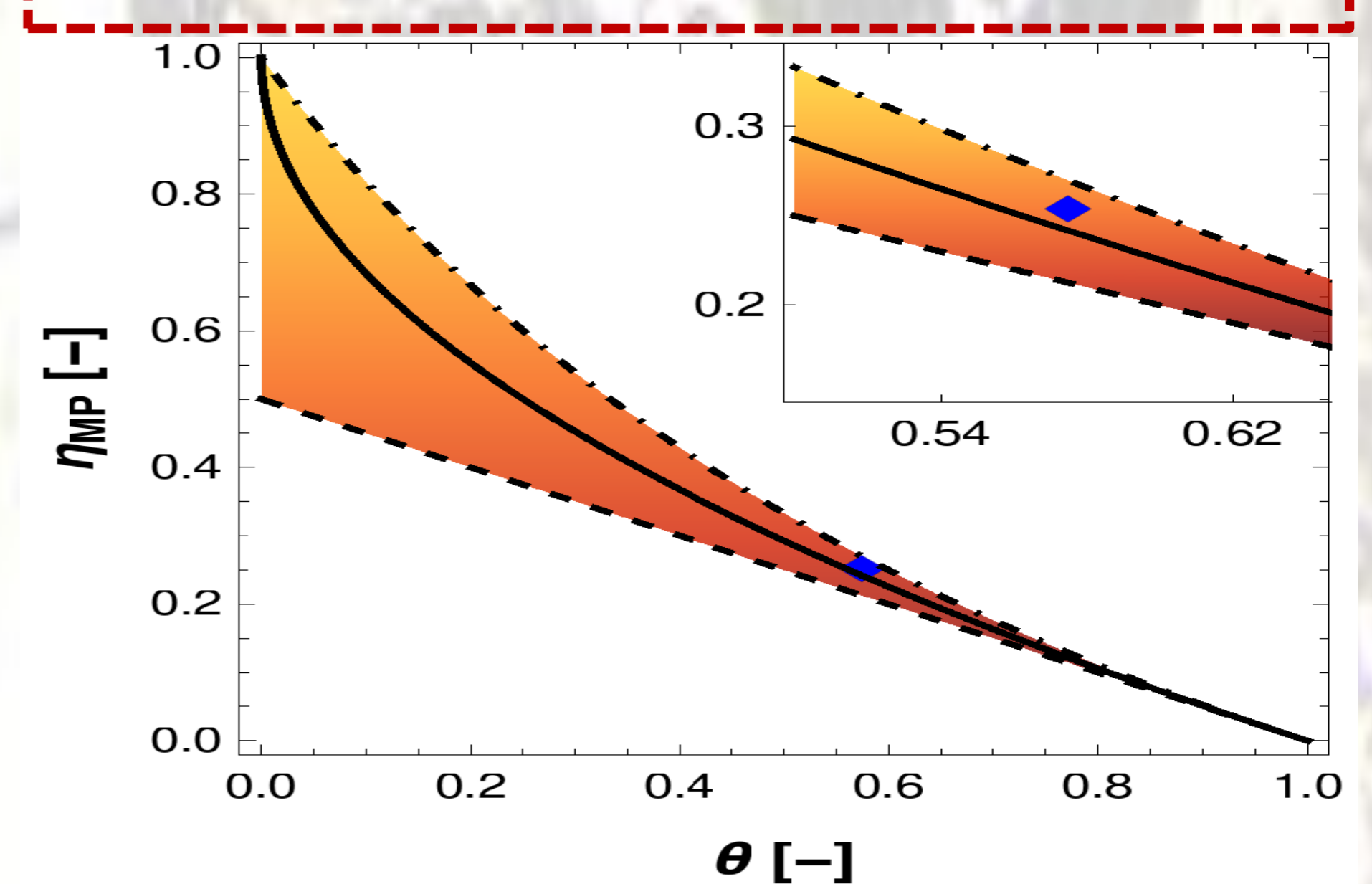
$$P \equiv \frac{-W}{\tau} = \frac{k_B(T_h - T_c) \ln\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right) - \left(\frac{T_c \Sigma_1}{\tau_1} + \frac{T_h \Sigma_2}{\tau_2}\right)}{\tau_1 + \tau_2} \quad (25)$$

$$\eta_{MP} = \frac{(T_h - T_c) \left(1 + \sqrt{\frac{T_c \Sigma_1}{T_h \Sigma_2}}\right)}{T_h \left(1 + \sqrt{\frac{T_c \Sigma_1}{T_h \Sigma_2}}\right)^2 + T_c \left(1 - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\right)} \quad (26)$$

Al considerar una disipación simétrica se recupera la eficiencia de Curzon-Ahlborn.

$$\eta_{MP} = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_h}} = \eta_{CA} \quad (27)$$

Considerando disipación asimétrica  $\left(\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\right) \rightarrow 0$  el valor de  $\eta_{MP}$  queda acotado superiormente por  $\eta_{MP}^S = \eta_C / (2 - \eta_C)$ . Si  $\left(\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}\right) \rightarrow \infty$ . Entonces existirá una cota menor,  $\eta_{MP}^- = \eta_C / 2$ .



**Ecuación de Langevin**

$$\alpha \frac{dx}{dt} = -\kappa(t)x + \xi(t). \quad (1)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2\lambda\delta(t-t')$$

$$\alpha \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = -2\kappa(t)\langle x^2 \rangle + 2\langle x\xi(t) \rangle. \quad (2)$$

**Energética de la partícula**

De acuerdo con [2], el trabajo y el calor promedio entre dos estados de equilibrio A y B son

$$W_{AB} = \frac{1}{2} \int_A^B \langle x^2 \rangle d\kappa \quad (3)$$

$$Q_{AB} = \frac{1}{2} \int_A^B \kappa d\langle x^2 \rangle + \frac{1}{2} k_B (T_B - T_A) \quad (4)$$

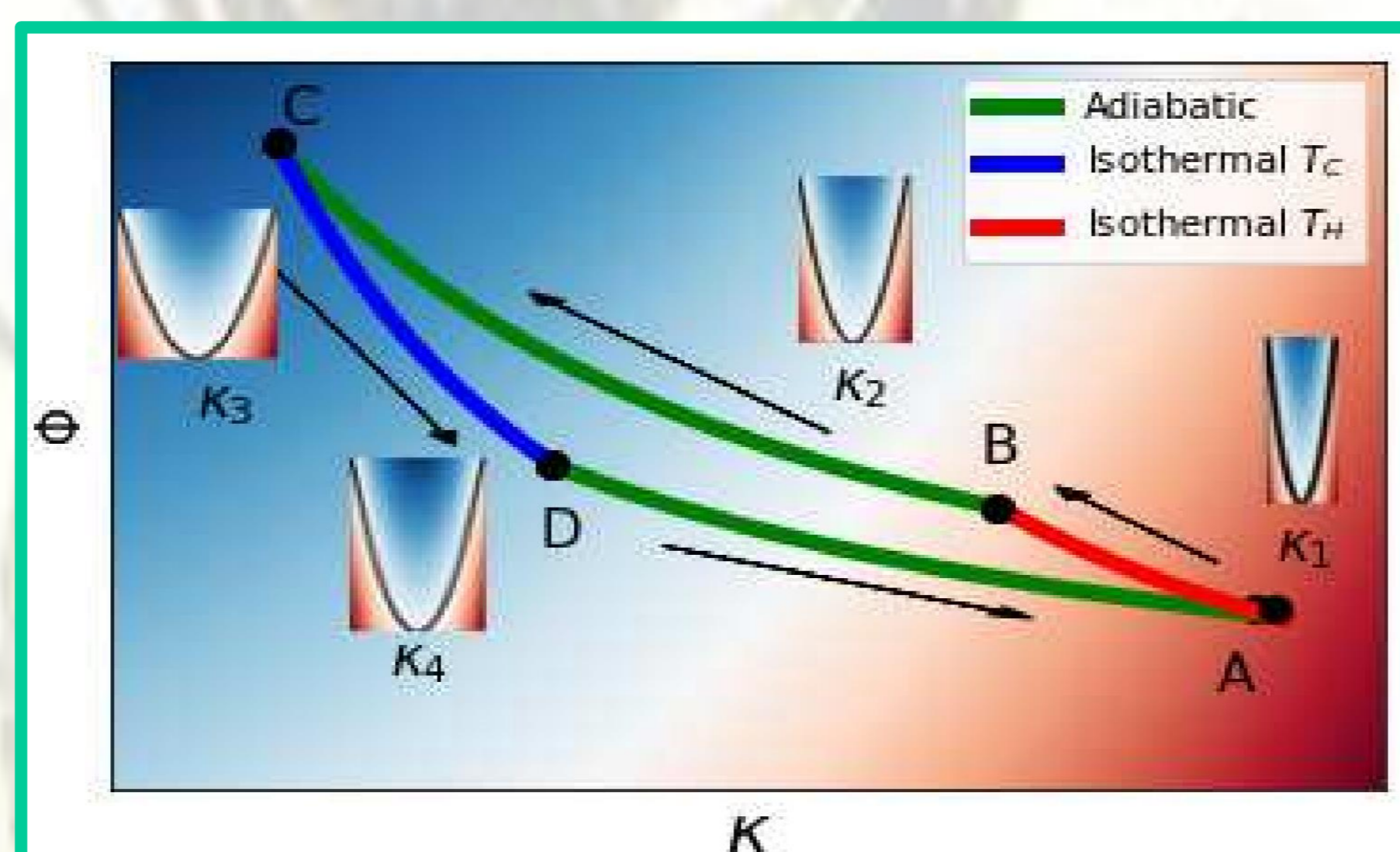
Por otro lado la energía libre de la partícula puede ser obtenida a partir de la siguiente función de partición

$$Z(\kappa, T) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta \kappa x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{\kappa}} \quad (5)$$

Por lo tanto, la energía libre de Helmholtz viene dada por

$$F(\kappa, T) = -k_B T \ln \left( \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{\kappa}} \right) \quad (6)$$

## El Modelo



i) "Expansión" isotérmica (A → B):

$$W_{AB} = \frac{k_B T_h}{2} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \frac{d\kappa}{\kappa} = \frac{k_B T_h}{2} \ln\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right) < 0 \quad (10)$$

$$Q_{AB} = -\frac{k_B T_h}{2} \ln\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right) = \frac{k_B T_h}{2} \ln\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right) < 0 \quad (11)$$

ii) Expansión adiabática (B → C):

$$W_{BC} = (\Delta E)_{BC} = k_B (T_h - T_c). \quad (12)$$

iii) "Compresión" Isotérmica (C → D):

$$W_{CD} = \frac{k_B T_c}{2} \int_{\kappa_3}^{\kappa_4} \frac{d\kappa}{\kappa} = \frac{k_B T_c}{2} \ln\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right) > 0 \quad (13)$$

$$Q_{CD} = -\frac{k_B T_c}{2} \ln\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right) < 0 \quad (14)$$

iv) "Compresión" adiabática (D → A):

$$W_{DA} = (\Delta E)_{DA} = k_B (T_h - T_c). \quad (15)$$

$$\eta = \frac{W_{tot}}{Q_{in}} = \frac{\frac{k_B}{2} [T_h \ln\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right) - T_c \ln\left(\frac{\kappa_4}{\kappa_3}\right)]}{\frac{k_B T_h}{2} \ln\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)} \quad (16)$$

## CONCLUSIONES

En el estudio teórico del desempeño de una máquina térmica Browniana que realiza un ciclo tipo Carnot, se toma como punto de partida una ecuación diferencial asociada al desplazamiento cuadrático promedio y un esquema termodinámico fuera de equilibrio de baja disipación. Primeramente, se mostró bajo condiciones reversibles que la máquina estocástica alcanza la eficiencia de Carnot. A continuación, mediante un modelo de tiempos finitos se obtuvo la expresión característica del desempeño energético macroscópico de motores térmicos, siguiendo un planteamiento similaral de [2], en el que se ha considerado que el protocolo de rigidez depende del tiempo, mientras que el calor y el trabajo son irreversibles. Por lo que toman en cuenta bajas disipaciones. Además, para el caso en el que  $\Sigma_1 = \Sigma_2$  se recupera la expresión de la eficiencia de Curzon-Ahlborn, mientras que los límites en los que la disipación es simétrica, definen la región de operación energética de este modelo.

## REFERENCIAS

- O. Contreras-Vergara, N. Lucero-Azuara, N. Sánchez-Salas, and J. I. Jiménez-Aquino. "Langevin original approach and ornstein-uhlenbeck-type processes". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 584, p. 126349, 2021
- K. Sekimoto. *Stochastic energetics*, vol. 799. Springer, 2010.
- M. Esposito, R. Kawai, K. Lindenberg, and C. Van den Broeck. "Efficiency at maximum power of low-dissipation Carnot engines". *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, no. 15, p. 150603, 2010.
- I. A. Martínez, E. Roldán, L. Dinis, D. Petrov, J. M. Parrondo, and R. A. Rica. "Brownian Carnot engine". *Nature physics*, vol. 12, p.p. 67–70, 2016.